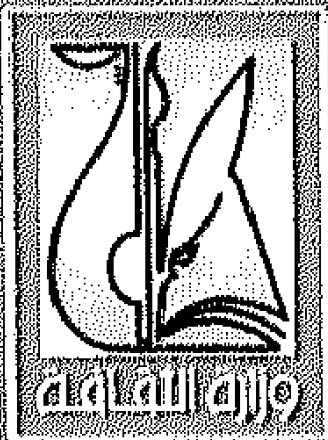


أديب الخوري

الرياضيات

عالمٌ رائع

MATHEMATICS

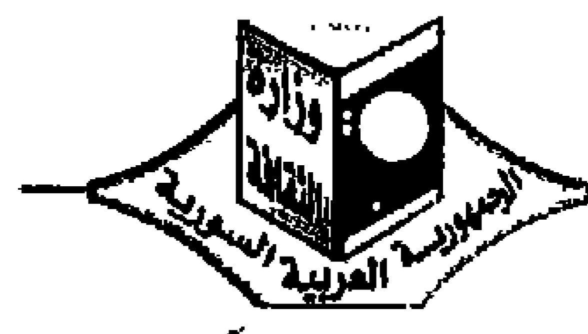
علوم 8

الرياضيات

عالمٌ رائع

أديب الخوري

الرياضيات
عالمٌ رائع



مَنشُورات وزارة الثّقافة
في الجُمهوريّة العَربيّة السّوريّة
دمشق

الرياضيات عالم رائع / أديب الخوري .- دمشق : وزارة الثقافة، ٢٠٠٦ .- ٢٠٥ ص ؛ ٢٤ سم .

(علوم ؛ ٨)

١- ٥١٠,١ خ و ر ٢- العنوان ٣- الخوري

٤- السلسلة

مكتبة الأسد

علوم

« ٨ »

بطاقة محبّةٍ وشكر

ما يستهويني في الحياة هو القدرة على المساهمة بعمل، بحقيقةٍ أكثر بقاءً منّي.

تيار ده شاردان

يقع قسطٌ كبيرٌ من مادّة هذا الكتاب في مجموعةٍ من المحاضرات التي أعددتها ضمن برامج محاضرات الجمعية الكونية السورية منذ العام ١٩٩٧. كنتُ على الدوام أشعر بشيءٍ من الخوف قبل كلّ محاضرة ألا أستطيع تبسيط الموضوع إلى الدرجة الكافية وأن أرى بعض الأشخاص يخرجون قبل انتهاء المحاضرة. ما كنتُ أخاف منه بالتحديد هو أن يحجب اضطراري لاستخدام بعض الرياضيات الفكرة التي أريد أن أوصلها عن المادّة نفسها. لكنّ جميع المحاضرات التي ألقيتها منذ سبعة أعوامٍ أكّدت بطلان سبب خوفي بل لقد كنتُ أفرح في كلّ مرّةٍ أشعر فيها بتجاوبٍ كبيرٍ من قبل الحاضرين كما كنتُ أُدهَشُ لحماس الكثيرين ممّن ليست الرياضيات اختصاصهم. كانت ردود الأفعال في جميع تلك المحاضرات، ولاسيّما الأخيرة منها في أيّار من هذا العام، هي الدافع الرئيسي الّذي جعلني أمضي في إعادة صياغتها وجمعها في كتاب. وعليّ أن أعترف بأنّ المشكلة نفسها قد واجهتني مجدّدًا فتردّدتُ كثيرًا في "كم" من الرياضيات عليّ

أن أضع في هذا الكتاب وكيف. قرّرتُ أخيرًا وضع معظم المادّة الرياضية التي رأيت أن لا غنى عنها، أو أنّها تساعد كثيرًا من لديه المزيد من الرغبة في الفهم الأعمق، وإن ببذل بعض الجهد، ضمن ملاحق أو ضمن مربّعات نصوصٍ يمكن أن تُقرأ منفردةً بحيث لا تقطع قراءتها سياق المتن.

أدين لأشخاصٍ كثيرين، سواء على نحوٍ مباشرٍ أو غير مباشر، في إتمام هذا العمل. وأعتبر أنّ هذا العمل هو ثمرة أعمال أشخاصٍ كثيرين وإن كانت تظهر من خلالي. أريد والحال أن أوّجه بطاقةَ محبّةٍ وعرفان إلى جميع الّذين قاموا بهذا العمل معي: إلى أهلي وإخوتي أوّلاً. إلى جميع الّذين كانوا بطرق مختلفةٍ لي معلّمين. وأريد من بين أساتذة الرياضيات الّذين درستُ على أيديهم وكرّسوا فيَّ حبّ الرياضيات، أن أذكر بشكلٍ خاصّ الأستاذ زهير درويشة الذي كان أستاذي لثلاث سنوات المرحلة الإعدادية والذي تنبأ لي منذ عشرين عامًا، أن أصير مدرّسًا للرياضيات. ومن المرحلة الثانوية الأستاذ إيشوع اسحق الذي درّسني في آخر سنوات هذه المرحلة أي البكالوريا. أمّا من بين أساتذتي في قسم الرياضيات في جامعة دمشق فأريد أن أخصّ بالذكر الأستاذ عبد الواحد أبو حمدة، الذي كانت محاضراته في مادّة الجبر تشعرني بمتعةٍ كبيرة والأستاذة دعد الحسيني التي علّمني أسلوبُها الكثير عمّا يمكن أن أسميه "الأناقة الرياضية". أتوجّه بالشكر والتقدير والمحبّة أيضًا إلى الأستاذ فايز فوق العادة رئيس الجمعية الكونية السورية الذي ساعدني كثيرًا على عدم الانغلاق في إطار تدريس الرياضيات ضمن المناهج المدرسية وعلى مواصلة العلاقة مع الرياضيات ومع العلم بشكلٍ عام. أشكر له أيضًا أنه راجع مخطوط

هذا الكتاب وأسدى إليّ بعض الملاحظات. كما أتوجّه بالشكر لجميع أعضاء الجمعية وجمهورها ولجميع زملائي من أساتذة الرياضيات الذين ساهموا من خلال تشجيعهم في قراري بنشر هذا الكتاب. أريد ألا أنسى أيضًا جميع الأشخاص الذين لا أعرفهم والذين سيسهمون في إخراج هذا الكتاب إلى النور، من فنيّين وعمّال طباعة وغيرهم.

آمل لـ "الرياضيات عالمٌ رائع" أن يؤدّي ما رجوته منه من فائدةٍ لجميع القرّاء من محبّي العلم ولاسيّما لمن اختاروا أو هم على طريق اختيار الرياضيات كمادّةٍ لدراستهم وعملهم.

معرونة، ريف دمشق ٢٠٠٣/٧/٢٢

أديب

الوحدة الكبرى

"يعني التقدّم في الوجود إمعانًا في الوحدة"

تيار ده شاردان.

حزمتُ أمري بعد تردّدٍ على كتابة هذا الفصل الّذي يبدو أن لا علاقة له بموضوع الكتاب ولعلّ القارئ سيدرك بنفسه سبب تردّدي، لكنّني انتهيت بأن أثبتّه وذلك لأسبابٍ أشرحها فيما يلي.

لطالما قرأتُ كتبًا تتكلّم عن موضوعٍ علميٍّ أو آخر لكنّها تخفي في طيّاتها دعوةً لإيديولوجيّة معيّنةٍ أو تعصّبًا لطريقةِ تفكيرٍ أو أخرى، أو مهاجمةً لفلسفةٍ أو عقيدةٍ تخالف ميل الكاتب أو توَجُّهَه الفكريّ أو الإيديولوجيّ. لكلّ كاتبٍ في نهاية الأمر طريقته في التفكير ورؤياه الخاصّة سواء للعلم أو للحياة أو لغير ذلك من الأمور... وهذا حقٌّ لكلّ مفكّرٍ ولكلّ إنسانٍ بطبيعة الحال. لكنّني في كثيرٍ من الأحيان كنتُ أشعر أنّ بعض الكتّاب كانوا يستخدمون كتابًا في العلم، كتابًا عن الرياضيّات مثلاً، لينقلوا من خلال ما بين السطور أفكارهم المختلفة. الأمر الذي يزيد في كثير من الأحيان حجم الكتاب إلى الضعفين، أعني أنّه كان من الممكن لهم، لو أرادوا، أن يُبرِزوا الفكرة العلميّة التي هي غاية

الكتاب في نصف حجمه، لو لا رغبتهم غير المعلنة في تقديم أفكارهم المختلفة التي لا تتعلّق مباشرةً بالموضوع. ولا أقول إنّ ذلك كان يجري على الدوام بطريقةٍ مقصودة، فلقد يحدث أن ينساقَ الكاتب وراء تقديم فكره وفلسفته دونما شعور. ولا أقول أيضًا أنْ ليس لهذا الأمر نواحيه الإيجابيّة، فالتحدّث عن مواضيع مختلفة يساعد أحيانًا في الحدّ من جفاف الكتاب، خصوصًا عندما يكون كتابًا علمياً غيرَ موّجّهٍ إلى مختصّين...

في عهد الاتّحاد السوفيتي، على سبيل المثال، كان يحدث كثيرًا أن يستخدم الكتّاب السوفييت كتبًا غايتها الأساسيّة تبسيط العلوم للحديث قليلاً أو كثيرًا عن الفلسفة الماديّة وللسخرية من كلّ القيم الدينيّة والروحيّة... وكان يحدث بالمقابل أن يردَّ عليهم الغربيّون، والأميركيون بالتحديد، بكتاباتٍ علميّة أيضًا لكنّها كثيرًا ما تجيز لنفسها الابتعاد عن الموضوع لتهاجم الفلسفةَ الماديّة أو لتطرح فلسفاتٍ أخرى مختلفة. ولم يكن ذلك في الكثير من الأحيان بسبب إيمانٍ عميق لدى هؤلاء الغربيّين أكثر مما لمجرّد الردّ على الماديّين أو لنشر دعاية رأسماليّة باسم القيم الديمقراطيّة ومن خلال الكتابات العلميّة.

لا أريد لكتابي أن يكون من هذا النوع. أريد أن أقول منذ البداية إنّني لا أفصلُ العلم عن الإنسان. كذا، أنطلقُ في الحديث عن الرياضيّات وفي رؤيتي لطبيعتها ولدورها من قناعاتٍ فكريّة محدّدة أرغب أن أتحدّث عنها صراحةً لا أن أمرِّرَها بين السطور. وأعتقدُ أنّ هذا حقٌّ أيضًا، فالغاية من العلم في نهاية المطاف هي *الإنسان* نفسه، وفي هذا الإطار بالضبط إنّما يأتي هذا الكتاب.

بعد إلقائي لمحاضرتي الأولى في الجمعيّة الكونيّة السوريّة، "لماذا الرياضيّات" عام 1997، علّق صديقٌ أحترمُ بعمقٍ رأيه على كون المحاضرة "تنطوي على نَفَسٍ صوفي"، على حدّ تعبيره. لم ألحظ ذلك من جهتي، حتّى أنّني استغربتُ في حينه هذا التعليق. لكنّني اكتشفتُ لاحقًا أنّ هذا النفَسَ كان شيئًا من طبيعتي وأنّه دون شعورٍ منّي قد انتقل عبر الكلمات إلى نفوس المستمعين. أما اليوم فإنّني أفهم أكثر أنّني، شئتُ أم أبيْت، لا أستطيع أن أتحدّث عن الرياضيّات (أو عن أيّ موضوعٍ آخر) دون الانطلاق من قاعدةٍ فكريّة أظنّها، كما هو ظَنُّ كلُّ إنسانٍ في أفكاره، صحيحة. والحال فلقد فكّرتُ لكي أكون صادقًا مع نفسي ومع القارئ من جهة ولكي يكونَ الطرحُ أكثر وضوحًا من جهةٍ أخرى، أن أعبِّر ولو بإيجاز عن الخلفية الفكريّة، بل والروحيّة أيضًا، التي أنطلق منها لا في كتابة هذا الكتاب حصرًا بل في رؤيتي للحياة والكون والعلم عمومًا وفي عيشي لهذه الحياة أيضًا. وهذه الخلفية أستطيع أن ألخّصُها هنا في النقاط الآتيّة:

- تبنّي النظرة التطوريّة وفق طرح العالِم والمفكّر والمتصوّف الكبير تيار ده شاردان Teilhard de Chardin، والّذي أَعتبِرُه معلّمًا وملهمًا بالنسبة لي. وهي نظرةٌ تَعتبرُ، بحسب تعبير جوليان هكسلي Julian Huxly، *أنّ "الظاهرات، مع كونها تبدو معزولةً وجامدة، إلا أنّها ليست كذلك أبدًا: إنّها عملياتُ تَقَدُّم كاملةٍ أو جزئيّة. وعليه فإنّ فروع العلم تتوحّدُ كلّها كي تبرهن على أنّ الكون بكليته يجب أن يُعتَبَرَ عمليّة تقدّمٍ واحدةٍ عظمى، وهذه العمليّة هي صيرورةٌ نحو*

تحقيقِ مستوياتٍ جديدةٍ من الوجود، الأمر الذي نسمّيه تطوّرًا".
وبمعنىً آخر اعتبار الكون والحياة ظاهرةً تطوريّة على نحوٍ مستمرّ. والإنسانُ، كونه جزءاً لا يتجزّأ من هذه الظاهرة، وكونه، إضافةً إلى ذلك، الجزء من عمليّة التطور الذي تعي فيه هذه العمليّة نفسها، مَعنيٌّ بفهمها ووعيها ومن ثمّ بلعب الدور الموكَلِ إليه كقائدٍ وموَجّهٍ ومسؤولٍ عن هذه العمليّة، الأمر الذي نراه يتجلّى بوضوحٍ اليوم في الإمكانيات المتاحة أمام الجنس البشريّ لتنظيم الحياة على الأرض والحفاظ عليها وربّما نشرها في أرجاء المجموعة الشمسيّة والكون، أو في تدمير نفسه وفي التعرّض بالأذى للحياة على الأرض، إن بسبب التلوّث أو بسبب كلِّ أنواع المخاطر الأخرى التي يمكن أن يقودَنا إليها سوء استخدامِنا للعلم، كالاستنساخ واللعب بالجينات واللعب بالحياة، أو بسبب حربٍ نوويّة لا تبقي ولا تذر. فليست الغاية من العلم هي السيطرة على الطبيعة وتسخيرها لمنافع البشر، كما درجنا على تعليم أنفسنا، بل هي بالأحرى فهم الطبيعة وفهم الإنسان كجزءٍ من هذه الطبيعة، مسؤولٌ، على قدر ما أُعطِي من معارف ومن مقدراتٍ تقنيّة، عن سلامتها والحفاظ عليها وتطويرها. ويقودنا هذا إلى الاعتبار الثاني.

- وهو كما يقول تيار نفسه: *"اعتبار الإنسانيّة نموذجًا جديدًا لمتعضيّة يتحتّم عليها أن تحقّق إمكاناتٍ جديدةً لتطوّر الحياة على سطح كوكب الأرض".* وأعتقد شخصيّاً أنّ هذه الإنسانيّة الواحدة، المتعضّية الجديدة، ما تزال في طور التكوين، أنّها جنينٌ لم يولد

بعد، وأنّ ولادتها الوشيكة تترافق مثل كلّ ولادة بالكثير من الألم وكذلك بخطر الإجهاض! وأظنّ أيضًا أنّ التزايد الهائل في عدد سكّان الأرض، وهم خلايا جسد هذا الجنين من جهة؛ وبداية الارتحال في الفضاء من جهةٍ أخرى، والتقدّم التقنيّ ولاسيّما في مجالات الاتّصالات وتبادل المعلومات وظهور شبكة الأنترنت من جهةٍ ثالثة (والذي يشبه إلى حدٍّ كبيرٍ تكوّن الجهاز العصبيّ لهذا الكائن العتيد!) تُشكّل إشاراتٍ لتكوّن هذه البشريّة الواحدة والتي يبقى عليها بعد ذلك أن تتجاوز أسباب العداءات والانقسامات والحروب والكوارث... لكي تصبحَ مستعدّةً للعب دورها الحاسم المقبل. يمكن للقارئ أن يفكّر بكلّ آفاق هذه الفكرة، مجريًا ما يشاء من المقارنات، أما أنا فسأتوقّف عند هذا الحدّ لأن موضوع الكتاب الأساسيّ هو شيءٌ آخر.

- تصبُّ في هذه النظرة وتؤيّدها أفكار عالم النفس الكبير كارل يونغ ومن تبعه من المدرسة التي تسمّى اليوم علمَ نفس الأعماق، وبالتحديد فيما يتعلّقُ باللاشعور الجمعيّ (أو اللاوعي الجمعيّ أو الخافية الجمعية) inconscience collective. وهو إذا جاز القول ذلك الموروث الهائل من خبرات البشريّة ومعارفها منذ بداية تطوّرها، بل حتّى منذ ما قبل المرحلة البشريّة والموجود في أعماق كلٍّ واحدٍ منّا بلا استثناء، والّذي يفسّر على سبيل المثال أن يرى أحدنا في حلمه صورًا ما قبل تاريخيّة وأساطيريّة مختلفة... يمتلك كلُّ شخصٍ بالقوّة، أي على نحوٍ كامنٍ، وفق هذه النظرة جميع الخبرات التي مرّت بها

البشريّة، وجميع المعلومات والإمكانات التي توصّلت إليها. ولا يحتاج إلا إلى نوعٍ خاصٍ من التمرين إذا جاز القول، لكي يصبح قادرًا على إبراز هذه الخبرة التي هو مزوّدٌ بها أصلاً من مضمار الكمون ونقلها إلى مضمار التحقيق أي من مجال اللاوعي الجمعيّ إلى مجال الوعي. ويمكن القول إنّ هذه الخبرة (أو المعلومة،الخ..) تصبح أسهل متناولاً على الصعيد الواعي كلّما اعتُنِيَ بتحفيزِها من جهة، وكلّما كانت محلّ حاجةٍ للاستخدام من جهةٍ أخرى. هكذا نفسِّرُ مثلاً قدرةَ ولدٍ صغيرٍ على تعلّم العدّ وعلى قبول مفهوم العدد كشيءٍ منفصلٍ عن الشيء الّذي يمثّله، الأمر الّذي احتاج أجدادنا إلى أجيالٍ كثيرة كي يحقّقوه. وكمثالٍ آخر يلاحظ بعض الباحثين أنّ مهاراتٍ كقيادة الدرّاجة الهوائيّة أو الضرب على الآلة الكاتبة (أو لوحة مفاتيح الكمبيوتر)... تحتاج اليوم إلى تدريبٍ أقلّ مما كانت تحتاجه قبل بضعة عقود. إنّ تيار ده شاردان يتحدّث هنا عن وجود مجالٍ موحّدٍ للفكر الإنسانيّ، بل للكرة الأرضية على نحوٍ أكثر شمولية، بحيث أنّ الفكرة الجديدة المكتشفة في مكانٍ ما سرعان ما يمكن أن تظهر على نحوٍ يبدو مستقلاً في أماكن أخرى. ولشرح هذه الفرضيّة على نحوٍ أوضح نقدّم التجربة التالية التي أُجريت على بعض أنواع القِرَدة: قُدِّمت لقطيعٍ من القرود حبّات بطاطا بعد تغطيسها بالوحل وتركها لتجفّ. بعد فترةٍ من الوقت توصّل قردٌ إلى تغطيس حبّة البطاطا، التي جفّ عليها التراب، بماء البحر حتّى يذهب عنها الطين. بعد فترةٍ أخرى قلّده قردٌ آخر وبعد فتراتٍ من الزمن أقصر بكثير

صارت جميع القرود الأخرى التي تعيش في المنطقة نفسها تقوم بالفعل نفسه. لكنّ الأكثر أهميّة بما لا يقاس هو أنّ قرودًا أخرى في مناطق بعيدة جداً من العالم قد توصّلت للقيام بذلك خلال فترةٍ زمنيّة بالغة القِصر بالنسبة للفترة التي احتاجها القرد الأوّل. الأمر الذي يدعم فكرة وجود نوعٍ من "مجالٍ فكريّ" مشترك بين أبناء الجنس الواحد.

- تبنّي أفكار وطروحات ندوة البندقيّة (فينيسيا)[1] وبشكلٍ خاص "العبرمناهجيّة transdisciplinarité" التي يمكن أن ألخّصها كما يلي: لا يمكن لمنهجٍ معرفي، أيّاً يكن أدّعاء تفسير الطبيعة أو معرفة الكون أو الوصول إلى الحقيقة... إنّ للعلم دوراً يقوم به في صيرورة التطوّر على الأرض كما أنّ للتكنولوجيا دوراً آخر وللتقاليد المختلفة دورها أيضًا. ورغم كلّ التناقض الظاهر بين العلم والتقاليد ترى النظرة عبر المناهجيّة أنّ العلميّ والروحيّ لا يتعارضان بل يتكاملان ويتشاركان جنبًا إلى جنب في إنجاز تفتّح القدرات الكامنة في الإنسان وفي الإنسانيّة.

١- بين الثالث والسابع من آذار من عام ١٩٨٦ عُقِدت في فينيسيا في إيطاليا وبمبادرةٍ من منظمة اليونسكو ندوةٌ ضمّت سبعة عشر من أكابر العلماء المعاصرين في شتّى فروع العلم ومن مختلف البلدان. عُقِدت الندوة لمناقشة موقف ومكانة العلم حيال المناهج المعرفية الأخرى الفلسفية والدينيّة وغيرها ودوره في الحفاظ على الحياة على الأرض وتقدّمها . أصدر المشاركون بيانًا ختاميًا مشتركًا وقّعوا عليه جميعًا ويعدُّ هذا البيان بحدّ ذاته حدثًا تاريخيًا. صدرت ترجمة عربيّة لكتابٍ يضمُّ، إضافةً إلى البيان الختامي، أهمّ المحاضرات والمناقشات التي جرت في هذا اللقاء، عن وزارة الثقافة في سورية. والمرجع مثبتٌ في قائمة المراجع في آخر الكتاب.

يبقى أن أشير إلى كون وحدة الإنسانيّة هذه، هي بالنسبة لي موضوع إيمانٍ بالدرجة الأولى. إيمانٌ بالأصل المشترك وبالمصير المشترك. إيمان بالتضامن وبالتعاضد الإنسانيّن أبعد من كلِّ مظاهر الحروب والنزاعات والانقسامات، إيمان بالجهد الإنسانيّ المشترك منذ اكتشاف النار وابتكار الكتابة والمتصاعد عبر التاريخ وصولاً إلى عصرنا، عصر الكمبيوترات والفضاء... وهو إيمانٌ لا يستند على العلم أكثر مما يستند بالأولى على شعورٍ عميق أبعد من مجال العقل والمنطق. لكنّني أشعر أنّ العلم من جهةٍ أخرى يؤيّده ويؤكّده وأستطيع أن أؤدّي بلا أدنى تردّد شهادةَ كون عملي في الرياضيّات، وإن كان محدودًا جدّاً نسبيّاً، وأنّ قراءاتي ومطالعاتي في مجال فلسفة العلوم خصوصًا، إنّما تعمِّق هذا الإيمان وتثبّته. وعلى نحو ما يقول يونغ نفسه: *"لم أعد أؤمن صرت أعرف"*.

رحلة الألف ميل

يجب على مؤرّخ العلوم أثناء سيره على امتداد ماضٍ مظلم أن يساعد الأذهان على إدراك القيمة الإنسانية العميقة لعلوم اليوم.

غاستون باشلار

عندما نتّجه إلى تاريخ العالم القديم، يتكون لدينا، بدون وعي، نفس التأثير الذي يحدثه فينا التطلع إلى سلاسل الجبال من زجاج طائرة. فيتساوى كلّ شيء وتبدو المسافات صغيرة وتختفي التفاصيل نهائيًا، ولا تبدو عندئذٍ سوى صورة عامّة للمنظر.

ف. سميلجا

في عصر التطوُّر العلميّ والتقنيّ، بل عصر سيطرة العلوم والتقانة على مختلف مظاهر الحياة؛ ما تزال كلمة "تاريخ" ترتبط على الأكثر بتاريخ الأحداث السياسيّة والعسكريّة بالدرجة الأولى، والاجتماعيّة والاقتصاديّة بالدرجة الثانيّة، والعلميّة والفنيّة بالدرجة، ربّما، الأخيرة. ومع ذلك فإنّ ما نلمسه، لا يوميّاً فقط، بل في كلٍّ لحظةٍ من حياتنا، من أثر العلم فيها، ما هو غير محصّلةٍ لتاريخٍ طويل جدّاً يمتدّ بعيدًا في

ظلمات الأزمنة السحيقة. فضوء المصباح الكهربائيّ على سبيل المثال ما هو غير الحفيد البعيد لاكتشاف النار وترويضها منذ عشرة آلاف عام. وهكذا يمكن لأصل ما نتعامل معه اليوم من ألزم الأشياء لحياتنا أن يعود إلى فجر وجود الجنس الآدميّ وما نراه من منجزاتٍ مدهشة تبدو أقرب إلى المعجزات، ما هو في الحقيقة سوى تتويجٍ لسيروراتٍ مغرقة في القِدم.

لكنّ هذا العصر هو أيضًا عصر الاستهلاك. حيث تضيع قيم الأفكار والاكتشافات والمبادئ والعلوم مع تهاود أسعار الكولا والبطاطا المصنّعة والوجبات السريعة! ومع أنّ العلم وقرينته التكنولوجيا هما صاحبا الفضل المباشر في ما يعيشه إنسان اليوم من رفاهيةٍ لم يحلم بمثلها ملوك وسلاطين العصور الغابرة (وأيّ ملكٍ قبل مائة سنةٍ فقط كان يحلم بركوب طائرةٍ مثلاً؟) إلا أنّ هذه الرفاهيّة نفسها تجعلنا ننسى قيمة العلم الذي أتى بها. وهذا طبيعيٌّ أيضًا، فالّذي لا يُتعِبُ نفسَه في كثيرٍ من الأمور ويلجأ للآلة الحاسبة حتّى من أجل أبسط العمليّات الحسابيّة لا يستطيع أن يقدّر القيمة الكبرى للعلم والجهد العظيم الذي بُذِل عبر التاريخ من أجل وضع هذه الآلة بين يديه! من هنا كانت قناعتي بأهمّيّة تاريخ العلم وبأهمّيّة نشر ثقافةٍ وافيةٍ حول هذا التاريخ كوسيلةٍ تعيد للعلم البحت بعض قيمته الضائعة.

أمّا السمة الثالثة والأهمّ لهذا العصر الذي نعيش فيه فتقع، على ما أظنّ، في كونه عصر بزوغ الوحدة. العصر الذي يجري فيه الحديث في كلّ مكانٍ عن تحوّل الأرض، بفضل وسائل الاتّصال والنقل... إلى ما

يشبه القرية الصغيرة وهذا يعني بالضرورة تحوّل الناس في مجتمعاتهم ودولهم إلى عائلةٍ إنسانيّةٍ واحدة. لكنّ هذا الوعي لوحدة الجنس البشريّ لا يأخذ كامل عمقه إن لم نعرف، ونعمّم هذه المعرفة، بأنّ هذه الوحدة تجد جذورها أيضًا منذ بدايات ظهور الإنسان وأنّ العلم الذي يتيح لنا اليوم، أو يقدّم على الأقلّ الإسهام المباشر الأوفر في إتاحة إمكانية تحقيق هذه الوحدة، هو عملٌ مشتركٌ أسهمت فيه على امتداد التاريخ كلُّ الحضارات؛ وبأنّه من الضروري تتبّع تطوّره هنا وهناك وانتقال شعلته من أمّةٍ لأخرى عبر آلاف السنين لا بهدف إعطاء كلّ ذي حقٍّ حقّه، أو لتحديد إسهام كلّ أمّةٍ أو حضارة بل بالأولى من أجل التأكيد على أنّ ما نتمتّع به اليوم هو ميراثٌ مشترك. إنّه نتاج جهد البشريّة كلّها وعمل الناس جميعهم عبر التاريخ وهو اليوم ملك جميع الناس في كلّ الأرض وعلى الجميع معًا، أكثر من أيّ وقتٍ سابق، المضيّ إلى الأمام في طريقٍ لن يحسنوا تلمّس معالمها دون النظر إلى الماضي لرؤية كلّيّة المسار. كذا يمكن لتاريخ العلم أن يلعب دورًا موحّدًا على الصعيد النفسيّ الجمعيّ لبني البشر. والحقّ أنّ العلم قد لعب دومًا هذا الدور. وإذا كنّا نعي اليوم هذه الحقيقة فإنّ علينا أن نستفيد منها على نحوٍ أفضل بكثير. ففي الوقت الّذي يقصُّ علينا التاريخ العام، منذ ظهور البشر على الأرض، روايات الحروب والنزاعات والانقسامات فإنّ تاريخ العلم يروي لنا إذا أحسنّا قراءته قصّة مسيرةٍ مشتركة تتّجه نحو فهم حقيقة وجودنا ومغزاه وإذا كان التاريخ العام ينطوي على التأكيد على فرقة البشر ونزاعاتهم مغذّيًا روح العداء والانتقام فإنّ تاريخ العلم ينطوي على التأكيد على

وحدة هؤلاء البشر وتكاملهم مغذّيًا روح المحبّة والتعاضد. ففي العلم وحده، وخلافًا لكلّ المناهج المعرفية الأخرى الهادفة إلى فهم الإنسان والعالم، لا نجد علمًا يمينيّاً وعلمًا يساريّاً أو شرقيّاً وغربيّاً ولا نجد طوائف وأحزاب. صحيحٌ أنّ العلماء قد يختلفون في تفسير فكرةٍ أو نظريّة لكنَّ النظريّة نفسها لا تكون إلا صحيحةً أو خاطئة باعتراف الجميع. والرائع في العلم، فوق ذلك هو عدم وقوفه عند تفسيرٍ نهائيٍّ. بل انطلاقه المستمرّ نحو آفاقٍ جديدةٍ للفكر ونحو معرفةٍ أوسع للكون والطبيعة فكما يعبِّرُ آينشتاين A. Einstien: *لا يتردّد العلم أبداً في معارضة المنطق العام الفطري، فالذي يخشاه هو التضارب بين المفاهيم السائدة والمعطيات الجديدة. وإن حدث هذا التضارب، فإنّ العلم سرعان ما يسحق الفرضيّات القائمة ليصعِّد معرفتنا إلى سويّة أعلى*".[1]

انطلاقًا من كلّ ما تقدّم، يشهد العالم، في جهدٍ محمود، سعيًا نحو إعادة صياغة التاريخ العام بحيث يأخذ تاريخ العلم مكانه الملائم وأهميّته الخاصّة ضمن سياقات تاريخ الأحداث السياسيّة والعسكريّة والاجتماعية والفنيّة والأدبيّة والدينيّة وغيرها... وانطلاقًا من ذلك أيضًا، ولأسباب أخرى بالتأكيد، يشهد عصرنا اهتمامًا متزايدًا بتاريخ العلوم وبفلسفتها ويكفي للتأكّد من ذلك ملاحظة الإصدارات الكثيرة من الكتب حول هذه المواضيع كما والإقبال المتزايد من طلاب الجامعات على

١- من المفارقة أن آينشتاين نفسه قد عارض النظرية الكمومية بسبب مخالفتها للمنطق الفطري والحسّ السليم. لكن هذه النظرية أثبتت قول آينشتاين ففرضت نفسها ورفعت معرفتنا إلى سويّةٍ أعلى. مستفيدةً حتّى من أعمال آينشتاين نفسه.

دراسة هذه المواضيع والتخصّص بها. لكنّ منظورًا جديدًا لرؤية وتقويم الأحداث العلميّة يُطرَحُ اليوم. فكما يقول Fernand Seguin *"لقد اقتصَرَ تاريخ العلم لفترةٍ طويلةٍ، في عرضِه الناس والأحداث على نحوٍ نقطيٍّ فكأنّهم شواخص مأثورة على طول طريق موجّهةٍ بالضرورة نحو تقدّم الفكر بحيث يبدو الباحثون وفق هذا المنظور كأبطال موسومين بحظوة الإلهام، يكرِّسون حياتهم لحلِّ أسرار الكون ويجنون من معاصريهم، أو لاحقيهم، أكاليل الشهرة المبكّرة أو المتأخّرة. وهكذا يمكن استعراضُ مجرى التاريخ كما يُزارُ رواقٌ رُصِفَ بالتماثيل.. لكنّ اتجاهًا جديدًا ظهر اليوم يحاول وضع الاكتشافات العلمية ضمن المناخ الثقافي والاجتماعيّ الذي ولدت فيه، وتحليل الظروف المتعلّقة بقبولها أو رفضها أو تعديلها وفق العصر وآرائه المسبقة. وبدلاً من رؤية الاكتشاف العلميّ كقبس عبقريّة، يغدو هذا الاكتشاف جزءًا مكمِّلاً لصيرورةٍ فكريّةٍ اجتماعيّة ديناميكيّة تضفي عليه إنارةً جديدةً"*. هكذا، وبدلاً من رؤية العلم مشعلاً ينتقل عبر التاريخ من أمّةٍ إلى أخرى، وهذا صحيحٌ جزئيّاً وضمن منظورٍ ضيّق، يصبح العلم صرحًا هائلاً أسهم ويسهم في تشييده كلّ الناس وجميع الأمم. وهو بناءٌ يبني الإنسان بقدر ما يبنيه الإنسان. فتقدّم العلم هو تقدّم الفكر الإنساني، وكتابة قصّة العلم هي رواية قصّة تفتّح الفكر الإنسانيّ بدءًا من حالةٍ أوّليّة جداً ووصولاً إلى إنسان اليوم.

لعلّ كلّ ما ذكرته حتّى الآن يشكّل سببًا كافيا كي نوليَ تاريخ العلم منزلةً أوّليّة. لكنّني أودّ أن أشير إلى أسبابٍ عمليّةٍ أكثر. فمعرفة تاريخ الرياضيات أمرٌ ضروريٌّ لتقدّم الرياضيات نفسها أذكر كمثالٍ

بسيط أنّ البرامج التي تُبرمَجُ وفقَها الآلات الحاسبة للقيام بالعمليات الحسابية يعتمد بعضها على طرق الحساب القديمة التي منها ما كان يستخدمه البابليّون أنفسهم منذ أكثر من ثلاثة آلاف عام. بل إنّ تصميم الكمبيوتر نفسه إنّما يعتمد على مبدأ نظام العدّ الثنائيّ الذي ربّما كان أحد أولى محاولات الإنسان للعدّ لكنّ اكتشافه في التاريخ الحديث يعود للألماني لايبنتز G.W. Leibniz في مطلع القرن الثامن عشر، ومن الأكيد أنّ لايبنتز ما كان ليتخيّل طبيعة التطبيق الّذي أدّت إليه تسليته بالأرقام هذه.[1] يبقى سبب آخر للاهتمام بتاريخ الرياضيّات وهو سببٌ يعني معلّمي هذه المادّة بالدرجة الأولى؛ فكلّما كان لمدرّس الرياضيات معرفةً أكبر بتاريخها كان أقدر على تقديم المادّة من جوانب مختلفة وعرض أفكارها بطرق متعدّدة. يدرس طلاب الصفوف الثانوية، على سبيل المثال، عمليّة الاشتقاق. كما يدرسون عمليّة التفاضل، ويلاحظون التشابه الكبير بين هاتين العمليّتين. ويسأل بعضهم المدرّس أو يتساءل في نفسه إن لم يكن الأمر يتعلّق بعمليةٍ واحدة تكتب بطريقتين مختلفتين. والمؤسف في الموضوع هو أنّ المناهج لا تعالج أبدًا هذا الأمر كما أنّ معظم الأساتذة لا يعرفون أبدًا أنّ الفرق هو مجرّد فرقٍ في التسمية وفي طريقة الكتابة يعود لأسباب تاريخيّة بحتة وليس لأسباب رياضيّة. ولا يُلامُ الأساتذة أنفسهم

١- يقول لايبنتز في رسالة تعود لعام ١٧٠١ : "أرفق هنا محاولة في علم رقمي (هل سيكون مقبولاً يا ترى؟) جديد تمامًا. وهذا العلم يقوم باختصار (. . .) أكتب جميع الأعداد باستخدام الرمزين 0 و1 مستخدمًا تدريجًا ثنائيًا من عددين بدلاً من عشرة أعداد. ولا أفعل ذلك من أجل التطبيق العام بل من أجل القيام باكتشافات جديدة (. . .) وبهذه الوسيلة يمكن الوصول إلى اكتشاف حقائق لا يمكن بلوغها بطرق أخرى (. . .)

بقدرٍ كبير لأنّهم لم يتلقّوا هم أنفسهم من خلال تكوينهم الجامعيّ أيّ معلوماتٍ عن تاريخ الرياضيات. أمّا المدرّس المطّلع على نشوء التحليل الرياضيّ بين نيوتن I. Newton ولايبنتز، فهو يدرك ببساطةٍ سرّ هاتين الكتابتين المختلفتين واللتين تحتفظ كلّ منهما بأهميّتها الخاصّة رغم أنّهما تعبّران عن فكرةٍ واحدة.

أخيرًا فإنّ التاريخ هو قصّةٌ ممتعة كما كان يقول لنا محقّين أساتذة التاريخ في المدرسة وأعتقد أنّ كلّ ما يلزم للاحتفاظ بهذه المتعة هو حسن العرض والتقديم وآمل أن يحالفني في ذلك التوفيق.

الخُطى الأولى

الشجرة التي تملأ السماء تولد من بذرة صغيرة
والبرج الذي طبقاته تسع، يرتفع من قطعة حجر،
ورحلة الألف مكان تبدأ بخطوة واحدة خارج العتبة

لاو تسو، كتاب الطاو

إنّ العقلَ في التفاته إلى ميدان النظر، اي السماء والأرض؛ قد تنبّه إلى أنّ الجمال هو الذي يجذب النظر. ففي الجمال الشكل، وفي الشكل القياس، وفي القياس العدد.

أوغسطينوس الأورديني

كان يا مكان في قديم الزمان

كان هناك راعٍ لم يترك، مثل أكثر العظماء الحقيقيّين، اسمه وعنوانه وتاريخ مولده وجنسيته، هذا إن كانت له جنسية، مسجَّلاً في التاريخ؛ ذلك أنّه عاش ما قبل التاريخ. ففي ذلك الزمان كان الرعيُ مهنةً جديدةً وبدائيّة. ولا شكّ أنّ ذلك الراعي لم يكن يشبه كثيرًا رعاة بقر غرب الولايات المتّحدة الأميركية، أبطال المسدّسات، الذين كانوا ينفّسون عن تعبهم بلعب الورق أو البيليياردو وبشرب الويسكي والبيرة. بل كان إنسانًا بسيطًا جدّاً عاش في زمان لم يكن ثمّة الكثير من الأشياء يستطيع

المرء أن يسلّي نفسه بها. كان صاحبنا مضطراً أن يصرف وقته بينما أغنامه تقضم العشب وتتقافز على الصخور، بالتفكير. وربّما أنّ التفكير لم يكن قد وُجِد أيضًا، ذلك أنّ التفكير يحتاج إلى لغة. ولم يكن قد تعلّم لغةً لأنّ اللغات نفسها لم تكن قد وُجِدَت بعد. لم يكن أمام راعينا العزيز إذًا، غير أن يتأمّل. والتأمّل كما نعلم جميعًا هو أمرٌ بالغ الصعوبة لكنّه على الدوام يعطي ثمارًا مدهشة!

تستطيع عزيزي القارئ تخيّل صعوبة الموقف. هب نفسك مضطّراً للبقاء وحيدًا لفتراتٍ طويلةٍ من النهار كلّ يوم. ليس هناك جهاز تلفزيون ولا حتّى راديو ليس هناك كهرباء أصلاً. لا أشخاص تحدّثهم... لا شيء تفعله... إنّ أغلبنا في مثل هذه الأحوال يتسلّون بالعدّ. نعدُّ الأشجار إذا كنّا في غابة أو المقاعد إذا كنّا في قاعة أو النجوم إذا كان الوقت ليلاً... لكنَّ الأعداد نفسها لم تكن موجودةً في ذلك الحين. والحال، فلقد توجّب على صديقنا الراعي أن يخترعَها!!

لا شكّ أنّ القصّة لم تجرِ على هذا النحو تمامًا. لكنّ أحدًا لا يعرف التفاصيل الدقيقة الأمر الذي يُطلِقُ لخيالِنا العنان. فلنفترض إذًا أن أشياء غريبة قد بدأت تحدث، إذ كذا هي الحال دومًا، عندما بدأ الراعي يفكّر بضرورة اختراع شيءٍ يسلّي به نفسه ويملأ أوقات فراغه. ولم يستطع أوّلاً فهم ماهيّة هذه الأمور الغريبة. فلعدّة أيام متتالية لازمه شعورٌ محبطٌ بأنّ أغنامه تتغيّر ولم تعد هي نفسها ولم يكن يستطيع معرفة طبيعة هذا التغيير. لم يكن قطيعه كبيرًا جداً، وهو أمرٌ لم يكن يعرفه بالأصل، لأنّه لم يكن يفرّق بين كبيرٍ وصغير ولم يكن كما أسلفنا يعرف أيّ شيءٍ عن الأعداد لكنّ هذا الشعور بتغيّر القطيع بدأ مع الأيام ومع ازدياد هذا التغير يفصح عن طبيعته واستشعر الراعي الذكيّ الموضوع. ولأن البشر قد فُطِروا على الفهم عن طريق المقارنة فلقد بدأ يبحث في تأمّله عن صورةٍ تقرّب له الفكرة الغامضة التي أقضّت مضجعه.

ثمَّ ماذا؟ لقد بلغنا منتصف الكتاب ولم نتحدّث عن أيّة رياضيات!!

أفهم اعتراضكَ عزيزي القارئ لكنّني أستميحك عذرًا وأطلب منك القليل من الصبر فلإطالتي هذه سببان: أولهما معرفتي بأنّ معظم القرّاء سيبدؤون بتقليب الصفحات بسرعة بمجرّد أن يشاهدوا بعض المعادلات أو الرموز الرياضية، وثانيهما سأقوله فيما بعد. أمّا الآن فبينما كنّا نبتعد عن الموضوع كان أخونا الراعي قد وجد مقارنةً مناسبة زادت فهمه لما يحدث. والحقّ أنّه كان لزوجه فضل كبير في ذلك. فقد كانت هذه الزوج تهتمّ بصنع بردةٍ من جلد الماعز لكلّ واحدٍ من أولادهما. ومنذ سنةٍ تقريبًا حدث مع الأسف وباءٌ أصاب كلّ المنطقة بحيث أن بعض أولادهما لم يعودوا موجودين. في حين بقيت بطبيعة الحال مآزرهم. وهنا خطرت ببال الراعي النبيه فكرة عظيمة. ونام في ذلك اليوم وقد عزم على القيام بأمرٍ يؤكّد له، أو ينفي، حدسه في ما يحدث مع القطيع، لكنّ أيّ تصوُّرٍ كبيرٍ عن كونه يفتح أمام جنس بني البشر بابًا كبيرًا جداً نحو آفاقٍ لا تخطر في بال أحد، ما كان ليخالجه. في كلّ الأحوال لم يكن الجنس البشريّ بالنسبة له أكثر من بعض الأسر التي تعيش معًا في ذلك الوادي مشكّلةً قبيلةً واحدة.

في اليوم التالي، عندما فتح باب الحظيرة، التي لم تكن غير مغارة حفرتها الطبيعة في الصخر سُدَّ بابها بحاجزٍ من جذع شجرة؛ كان قد حمل معه وعاءً صغيرًا صُنِعَ بطريقةٍ ما من تراب الأرض. وأخذ يلتقط حصاةً من الأرض يضعها في الوعاء كلّما خرجت غنمة من المغارة. وعندما خرجت آخر واحدةٍ منها كان قد سجّل في أوّل دفترٍ في تاريخ الكتابة أوّل "عددٍ" في تاريخ الرياضيات، دون أن يعي كثيرًا بُعد ذلك. وفي المساء لدى عودته صار يُخرِج من الوعاء الطينيّ

حصاةً كلّما دخلت غنمة إلى المغارة ولم يُصَب بدهشةٍ كبيرة عندما بقيت بعض الحصيّات في الوعاء. فقد حصل ما يؤكّد حدسه بأنّ للذئب علاقةً بالأمر.

كذا بدأت مغامرة العدد، وسأصرّح الآن بالسبب الثاني الذي جعلني أطيل على هذا النحو. فإن كنتَ قد وجدتَ مملاً الحديث بكلّ هذا التفصيل عن إجراء أوّل مقارنةٍ على طريق التعرّف على الأعداد. فإنّ من المهمّ أن تعرف أيّها الأخ الكريم أن التوّصل لتمييز الواحد عن الإثنين قد استغرق بعد ذلك عدّة أجيال وأن روايتنا هذه لشديدة الاختصار إذا ما قورنت بواقع مجرى الأمور ولكي أوضح لك مدى إيجازي في رواية قصّة الأعداد وتاريخ الرياضيات بشكلٍ عام فإنّني أستطيع أن أُرجعك إلى السيد نيكولا بورباكي[1] وهو شخصيّة اعتباريّة تمثّل عددًا من علماء الرياضيات الفرنسيّين الذين أرادوا إعادة صياغة الرياضيات على نحوٍ موجز، فلم يستطيعوا اختصار الحديث عن العدد واحد بأقلّ من مائتي صفحة فقط! وفي كلّ الأحوال فأنا أعتقد بعمق أنّ بعض التأمّل في تفاصيل مثل هذه

١- في الأربعينات من القرن العشرين اجتمع خمسةٌ من كبار الرياضيين الفرنسيين ليشكّلوا جماعةً كان هدفها الرئيس إعادة كتابة الرياضيات مصاغةً بالطريقة الموضوعاتية الاستنتاجية وبطريقةٍ أخرى فقد أرادت هذه المجموعة أن تصدر كتابًا (هو في الواقع مجموعةٌ ضخمة من الكتب) تمثّل الرياضيات المعاصرة على نحوٍ ما كان كتاب المبادئ لإقليدس يمثّلُ الهندسة. ولعلم هؤلاء الرياضيين بأن مشروعًا كهذا ليس بالأمر السهل وأنّه يتطلّب الكثير جداً من الوقت والجهد، خصوصًا وأن ما يصدر من النشرات والأبحاث الرياضية يومياً يزيد عن إمكانية أن يتابعه شخصٌ واحد أو حتّى مجموعة ثابتة من الأشخاص، ولأن الرياضيات في تطوّرٍ مستمّر، مما يقضي أن تكون إصداراتهم مستمرّة وإلا فقدت قيمتها بعد وقتٍ قصير... فلقد جعلوا من أنفسهم جمعيةً تصدر الكتب الرياضية باسم مستعار هو نيكولا بورباكي. ولم تعد الجماعة محصورة بالمؤسسين بل إن الانتماء إليها يتم بقبول أعضائها بالإجماع المرشّح الجديد وذلك عندما ينسحب منها عضوٌ قديم بسبب رغبته الشخصية أو بسبب تجاوزه للسنّ المحدّدة لأعضاء المجموعة وهي الخمسين. من المهمّ أن نشير هنا إلى التأثير العظيم لبورباكي هذا على الرياضيات في القرن العشرين.

القصّة يمكن أن يساعدنا في التخلّي عن الكثير من غرورنا وادّعائنا الذكاء والتفوّق فضلاً عمّا يثبته هذا من وحدة الإنسان عبر التاريخ. فالأشخاص بحدّ ذاتهم ليسوا من الأهميّة بمكانٍ كبير لكنّ المهمّ هو أنّ كلّ تقدّمٍ يحقّقه شخصٌ ما في أيّ زمانٍ وأيّ مكان هو كسبٌ للإنسان في كلّ زمانٍ ومكان.

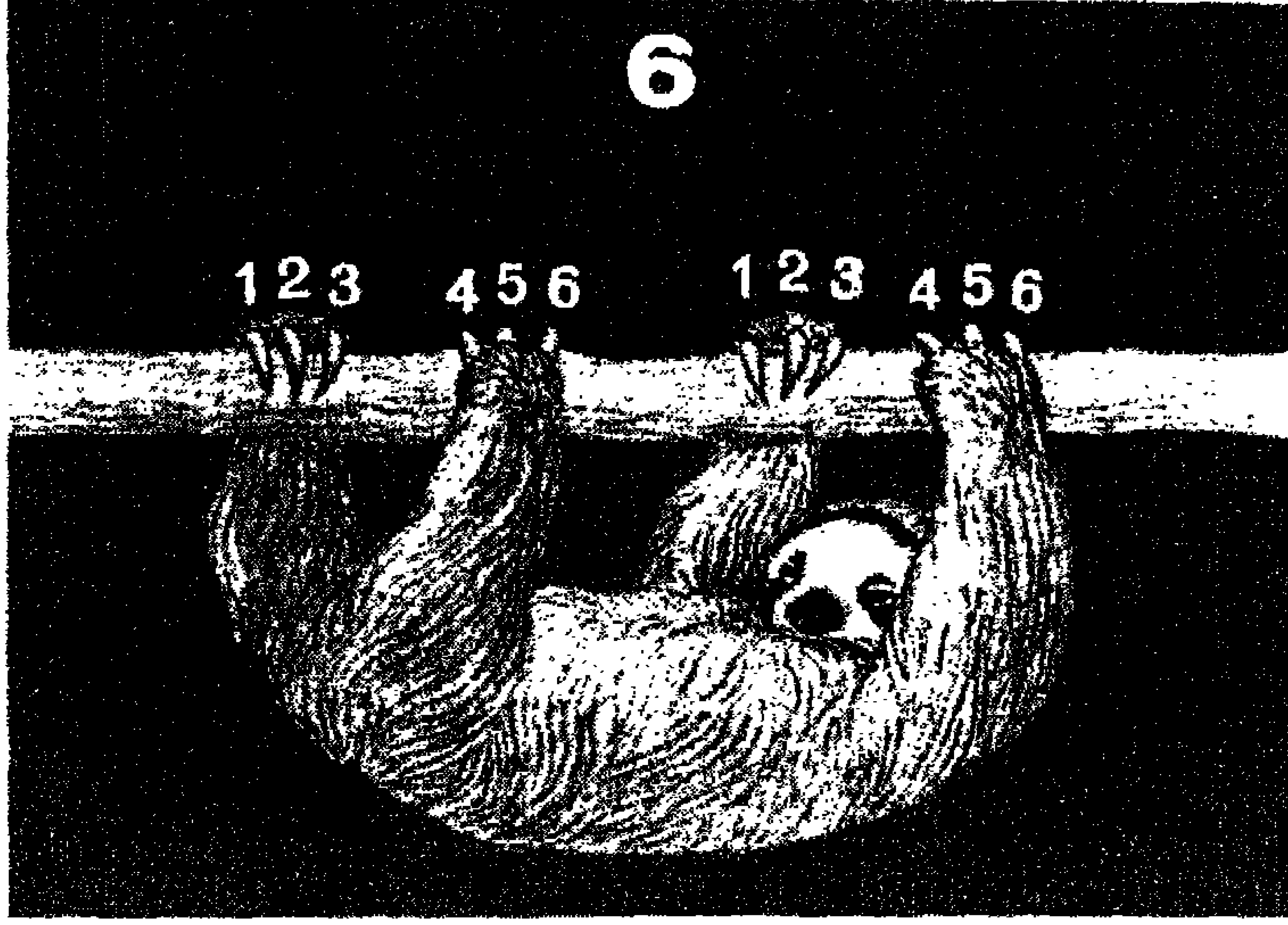
أصابع اليدين والقدمين وطرق العدّ القديمة

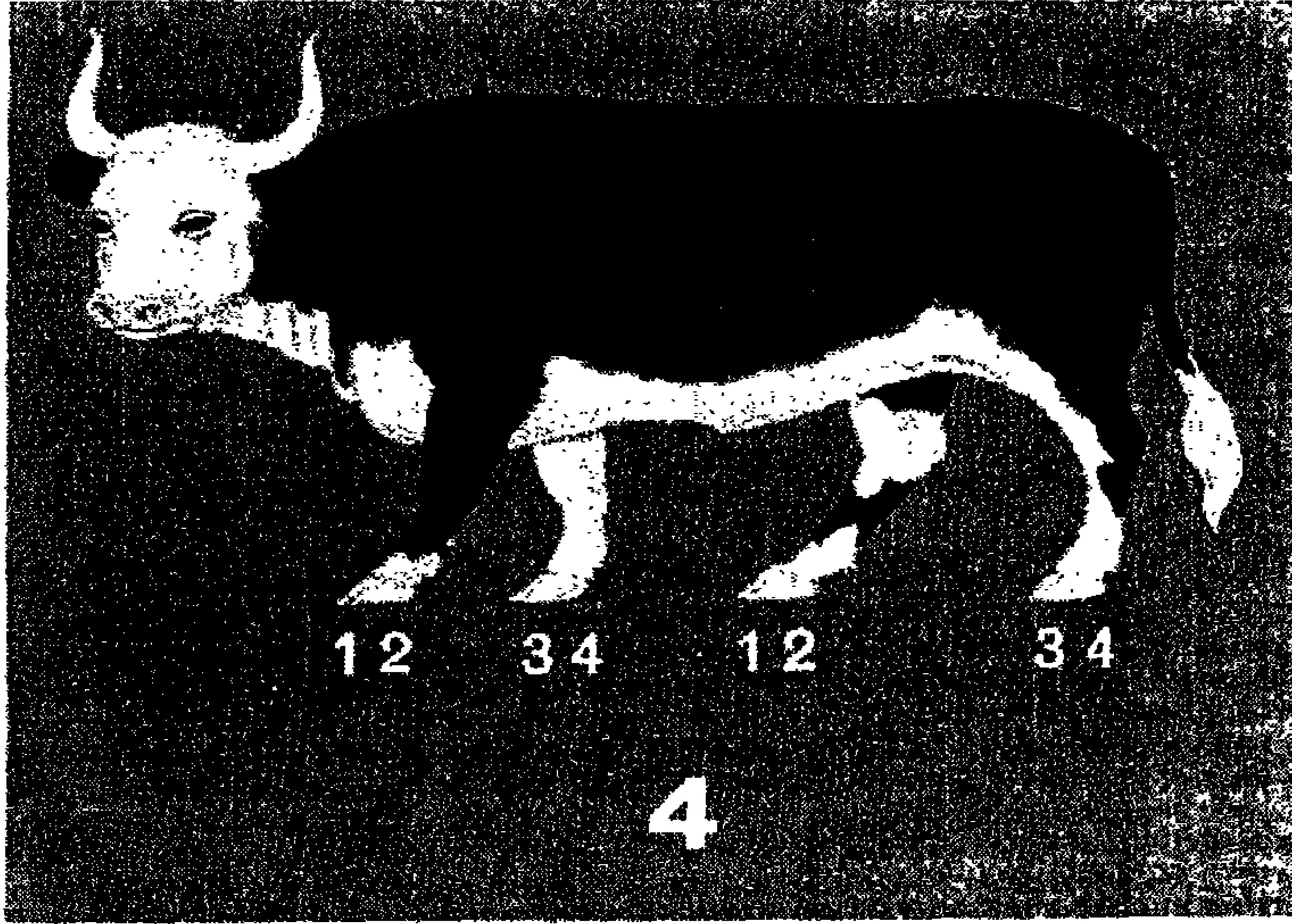
من المعروف أنَّ خير وسيلةٍ يستعملها التلاميذ الصغار لتعلّم العدّ وحتّى لتنفيذ بعض العمليات الحسابية هي أصابع اليدين وأغلب الظنّ أنّ الإنسان البدائيّ قد فعل بالمثل أيضًا، فعوضًا عن الحصيّات التي استخدمها صديقنا الراعي المجهول؛ اكتشف عظيمٌ مجهولٌ آخر أنّ أصابع اليدين يمكن أن تغني عن هذه الحصيّات في كثير من الأحوال، وفي أحوال أخرى، يمكن استخدام أصابع اليدين والرجلين معًا (سيّما أن الأحذية الجلدية الإيطالية الفاخرة لم تكن تُصنّع بعد!). ويعتقد الكثيرون بأن كون عدد أصابع اليدين هو عشرة، لا اثنا عشر مثلاً كان السبب في غلبة نظام العدّ والحساب القائم على أساس العدد عشرة والذي يسمّى النظام العشري. لكنّ هذا النظام، على خلاف ما نتوقع ليس النظام الوحيد ولا هو النظام الأقدم حتّى أنّه ليس الأجدى دومًا.

ربّما استخدم الأقدمون طريقة العدّ الثنائية التي سبق أن نوّهنا عنها والتي يستخدمها جهاز الكمبيوتر اليوم. وهي طريقةٌ تقوم على استخدام رمزين فقط.[1] وهناك أقوامٌ أخرى استخدمت كأساسٍ لعمليّة العدّ العدد ٢٠ الّذي يُفسَّرُ باستخدام أصابع اليدين والقدمين معًا وهذا النظام في العدّ

١- لا بدّ لفهمٍ أكبر لما يلي من بعض المعرفة الرياضية حول معنى نظام العدّ الموضعي أو الخانيّ، ولأجل ذلك أنصح المهتمّين، الذين يجدون صعوبةً في فهم بعض المصطلحات والمفردات بمراجعة الملحق الأوّل قبل متابعة القراءة في هذا الفصل.

ترك أثره حتّى اليوم في تسمية بعض ألفاظ العقود في اللغة الفرنسية، حيث يُقالُ للثمانين أربع عشرينات وللتسعين أربع عشريناتٍ وعشرة. وفي نظام





إذا توّصلت الدببة يومًا إلى نظامِ عدٍّ ما فمن المحتمل جداً أن يكون قائمًا على النظام السداسي

النقد السوري واللبناني؛ المأخوذ عن النظام الفرنسي أيضًا، فعندما كنت أذهب إلى المدرسة الابتدائيّة كانت والدتي تعطيني فرنكًا أو اثنين كخرجيةٍ يوميّة أمّا اليوم فإنّ أقلّ ما يمكن أن يُعطى لطفلٍ بنفس العمر هو خمس ليرات، مع أنّ الليرة الواحدة تساوي عشرين فرنكًا.

من أنظمة العدّ الشديدة الأهميّة التي استخدمها الإنسان في التاريخ نظام العدّ الستّيني والّذي لا نزال نستخدمه حتّى اليوم في تقسيمنا الساعة إلى ستّين دقيقة والدقيقة إلى ستّين ثانية. ومن الأكيد أنّ السومريّين والبابليّين كانوا أوّل من استخدموه في الحسابات الفلكية خصوصًا كونه يوافق تقسيمهم السنة إلى 360 يومًا. ولهذا النظام، مثل كلّ شيءٍ في العالم ميّزاته ومساوئه. فأمّا أهمّ ما يميّزه فهو أنّ العدد 60 يقبل القسمة على الكثير من الأعداد: 1، 2، 3، 4، 5، 6، 10، 12، 15، 20، 30، الأمر الّذي يقلّل من ظهور الكسور أثناء العمليات الحسابية. أمّا عيب هذا النظام الأكبر فهو الحاجة لابتكار وحفظ تسعةٍ وخمسين رمزًا مختلفًا لاستخدامها في كتابة الأعداد. الأمر الذي حلّه رياضيّو بابل باستخدام رمزين فقط! أمّا كيف جرى ذلك فأمرٌ له قصّةٌ شيّقةٌ أخرى، كان يمكن أن تضيع وربّما كنّا قد فقدنا إمكانية كبيرة لاكتمالها، ذلك أنّ ديمقراطيو القرن الحادي والعشرين ينهبون المتاحف ويخرّبون التراث!

من نهب متحف بغداد؟!

لا أقصد بالتأكيد أن أنتقل إلى السياسة فلست من أهلها. لكنّ الأحداث المأساوية التي أكتب في جوّها تفرض نفسها وتلقي بظلّها

الكالح على كلّ شخصٍ يملك مقدار حبّة خردل من الإنسانية ومن الشعور بأهمية الميراث الثقافي الإنساني. فليعذرني القارئ إن خرجتُ عن الموضوع، فأنا أعجز من أن أعبّر على الأقلّ عن ألمي لما يصيب مئات الأطفال الأبرياء جرّاء هذه الحرب والملايين منهم في كلّ الحروب في شتّى أنحاء العالم. ومن ناحيةٍ أخرى فإنّ متحف بغداد، والمتاحف العراقية الأخرى لا بدّ أن تحوي الكثير جداً من الوثائق الهامّة التي يزيد عمرها عن خمسة آلاف عام والتي تخصّ بشكلٍ مباشرٍ جدّاً موضوعنا، فبلاد الرافدين قد شهدت كما يعلم الجميع أهمّ فصول قصّة الأعداد. أعتقد في نهاية الأمر أنّ الذين كانوا وراء عملية النهب المحزنة تلك هم أشخاص وجماعات يهتمّون ولابدّ بالقيمة الماديّة الهائلة لمقتنيات المتحف والتي لا تقل عن القيمة الماديّة للثروة النفطية العراقية لكنّهم يهتمّون أكثر من ذلك بتزوير التاريخ لأنّه بكلّ بساطةٍ يفضحهم ويفضح الحجج الواهية لوجودهم الاستيطاني في المنطقة، إنّهم أشخاص وجماعات يستحقّون فعلاً كلّ ما يمكن من الشفقة. لأنّهم يظنّون أنّهم يستطيعون اغتصاب أمنهم بالقوّة غير عالمين أنّ الأمان لا يكون إلا بالنيّات الصادقة وبسلام القلب. وعلى كلّ حالٍ فلقد صدق من قال منذ ألفي عام :"ما من خفي إلا سيظهر" وهذا أمر يشعرني بالاطمئنان ويعطيني الصبر الكافي لترك التفكير في متحف بغداد ومكتبتها والانتقال بضعة آلافٍ من السنين إلى الوراء مع البقاء في المكان نفسه.

يتقدّم الزمن إلى الأمام وتزداد الحياة تعقيدًا باستمرار ولا بدّ للإنسانية على الدوام من أشخاصٍ يملكون ذكاء ذلك الراعي الذي

تحدّثنا عنه أعلاه، ليسعفوها بما يلزم من الرياضيات الكافية لحلّ مشاكل هذه الحياة.

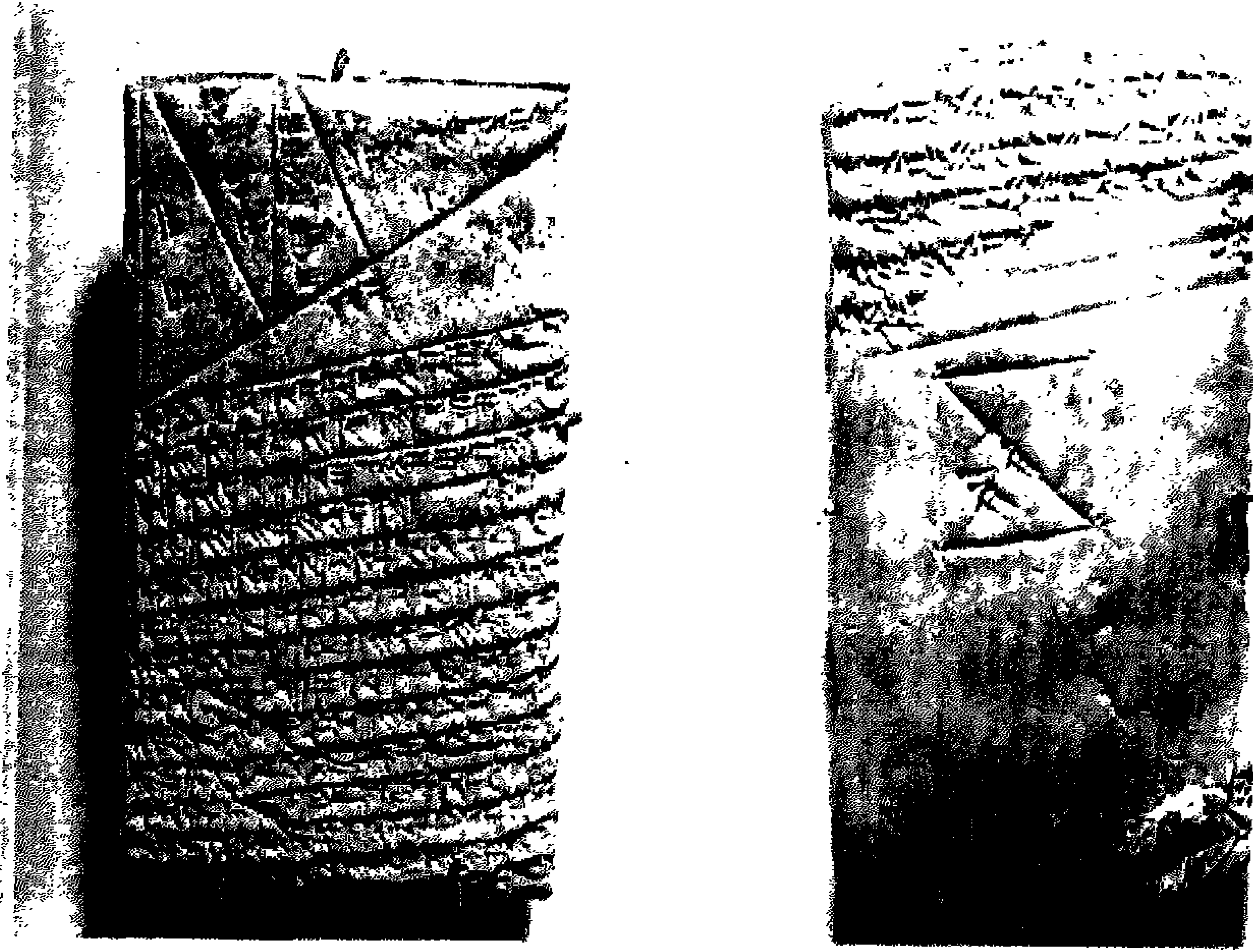
فمع نشوء المجتمعات "الحضرية" القائمة على الزراعة أوّلاً ومن بعدها ظهور المدن الكبيرة واشتغال الناس بالتجارة وابتكار المال، شيطان جميع العصور، وتنازع الناس على الأراضي أو على المحاصيل أو تنازع الإخوان على الميراث، وهو الجدّ الكبير لتنازع البلدان والممالك على أراضي الشعوب المسحوقة وتنازع الشركات الاحتكارية الكبرى على السيطرة على منابع النفط والثروات الأخرى... بدأ الحساب يبدو حاجةً لا غنًى عنها، وبدأ بفضل أشخاصٍ مجهولين بدورهم، بذلوا ولا شكّ جهودًا كبيرة، لاكتشاف طرقٍ يستطيع المرء فيها أن يقسِّم قطعةً من الأرض على عددٍ معيّنٍ من الأولاد توفي والدهم دون أن يلحق بأيٍّ واحدٍ منهم أيّ غبن. أو أن يستطيع تقدير كمية القمح التي يجب أن يقايض بها الفلاح راعيًا يريد أن يتخلّى له عن خاروفٍ مسمّن. كما ويمكن افتراض العكس أيضًا، أعني ربّما ساهم في تطوير الأعداد والحساب شخصًا أراد أن يجد طريقة لتقسيم أرضٍ بين عدّة أشخاص هو منهم، فكان همّه الأوّل الحصول بطريقةٍ ما على حصّةٍ زائدة. ولا بدّ من الاعتراف في نهاية الأمر أنّ العلم يتقدّم بالنوايا الحسنة للمشتغلين فيه لكنّ النيات الشريرة يمكن أن تولّد خيرًا أيضًا وهذا أمرٌ يجب أن يدعونا إلى التفاؤل وليس العكس. فكما ذهبت معهم نواياهم، بقيت النتائج الرياضية الهامّة التي وضعها مجموعة من لاعبي الميسر الأذكياء في القرون الوسطى لتنجب فيما بعد نظرية الاحتمالات وكما تنمو علوم اليوم في مراكز البحث العسكرية في الدرجة الأولى، فإن

مراكز البحث هذه ومَن وراءَها، مع كل نواياهم، ستصبح مع الوقت نسيًا منسيًا لكنّ النتائج العلمية الكبيرة التي يقدّمونها ستبقى لتقدّم للبشريّة القادمة خدماتها... شرط أن يبقى ثمّة بشريّة! ولا بدّ من الإشارة إلى أنّ حاجاتٍ ذات طبيعة فلكيّة كانت تفرض تطوير الحساب أيضًا سواء كانت هذه الحاجات دينيّة الطابع أو متعلّقةً بالفصول ومعرفة مواعيد البذار والحصاد والطوفانات وما إلى ذلك (في جميع الأحوال لم يكن هناك فصل كبير بين مثل هذه الحاجات وما نسمّيه اليوم حاجات دينيّة فقد كان الناس في ذلك الوقت يعيشون ما يؤمنون به ويؤمنون بما يعيشونه على عكس ما نفعل اليوم فنجعل الدين غطاءً لعيش أشياء أخرى!) وقد جرى ذلك في أنحاء كثيرة من العالم إذ من الثابت أنّ الحساب إن كان قد تطوّر في منطقةٍ أكثر من أخرى إلا أنّه كان يتطوّر في مناطق عديدة وعلى نحوٍ مستقلٍّ، حتّى أنّنا نجد تقنياتٍ مختلفةٍ لتنفيذ العمليات الأساسيّة باختلاف البقعة من العالم القديم بل وأكثر من ذلك نجد اختلافًا في نظم العدّ نفسها. ومع ذلك فإنّ من المؤكّد أيضًا، وعلى حدٍّ ما وصلَنا من الكشوف الآثارية ومن الكتابات القديمة، أنّ الحساب قد شهد تطوّرًا خاصًّا في بلاد بابل.

واقع الأمر هو أنّ أبناء حمورابي، وهو أوّل المشرّعين المعروفين في التاريخ، والّذي تثير قصّة تسلّمه الشريعة من الآلهة محفورةً على لوحين من الطين أبلغ الدهشة عند مقارنتها مع قصّة موسى، والّذي يمكن أن يفسِّرَ مجرّد وجود تمثالٍ له يصوّره مستلمًا ألواح الطين (الأمر الذي لم يتوفّر لموسى) نهب متحف بغداد، لا ينتسبون إلى عرقٍ خاصّ كما هو

الحال بالنسبة للسومريّين أو الأكاديّين أو سواهم من شعوب ما بين النهرين، بل بالأحرى إلى مدينة بابل التي سرعان ما أصبحت لفترةٍ ما مملكةً عظيمة تضمّ أعراقَ وشعوبَ عديدة من بينها السومريين أنفسهم الذين كانوا قد طوّروا أوّل نظامٍ معروفٍ لكتابة الأعداد كان خليطًا من النظام العشري والستيني. لكنّ البابليين وخلال زمنٍ يمتدُّ نحو ألفي عامٍ قاموا بتطوير هذا النظام على نحو رائعٍ وصولاً إلى أوّ ل نظامٍ عدديٍّ موضعيّ بما في ذلك استخدام الصفر وبداية استخدام الفاصلة العشريّة. وقد استخدموا هذا النظام لإنجاز عملياتٍ حسابيةٍ خارقة بالنسبة لزمانهم.

ولنتخيّلِ الأمر على هذا النحو: علّم صاحبنا الراعي أولاده أصول المهنة، بما في ذلك التأكّد من "حجم" القطيع لكنّه أورثهم كذلك شيئًا نفيسًا آخر لم يكن يدرك هو نفسه وجوده، أعني ملكة الذكاء وروح الابتكار. وهكذا لم يعد هؤلاء الأخيرين يعذّبون أنفسهم بوضع الحصيات وإفراغها بل صاروا بدل ذلك يضعون رسومًا معيّنة تمثّل الغنمات على السطح الخارجيّ للإناء الفخاريّ نفسه. ولقد كانوا كرماء بنقل سرّ المقارنة هذا إلى أبناء عمومتهم من مربّي الدواجن الذين كانوا يرسمون أشكالاً أخرى تمثّل الدجاجات وسرعان ما صار هناك الكثير من الأوعية التي رسمت عليها أشياء أخرى كثيرة وتلك كانت بداية اختراع الكتابة التصويريّة أيضًا وهذا أمرٌ يعطي للرياضيات فخرًا آخر فميلاد الرياضيات كان سببًا لميلاد اللغة. فالرياضيات واللغة توأمان وما كان ممكنًا أن ينمو أحدهما دون الآخر إلا بمزيدٍ من الصعوبة.



لوحان مسماريان بابليان يتضمنان نصوصًا رياضية. قبل نحو اسبوعين من كتابة هذه السطور كان هذان اللوحان في متحف بغداد أما الآن فالله أعلم بمكانهما!

هكذا صار حفيد راعينا العزيز يرسم شكلاً يمثّل الغنمة على الغلاف الطيني وصار أخوه المزارع يطبع شكلاً يشبه الدجاجة على سطح وعاءٍ آخر. فكان وعاء الأوّل يمثّل له عدد أغنامه ووعاء الثاني يدلّه على عدد دجاجاته.

نلخّص باختصارٍ شديد فنقول إنّ تطوّرين هامّين حدثا بعدئذٍ: الأوّل هو الاستغناء عن الأوعية وتحوّلها إلى ألواح طينيّة ، مع ما رافق ذلك من نحت أدواتٍ تستخدم لطبع الأشكال المنشودة على اللوح الطيني قبل أن يجفّ وهذا يعني بداية ولادة الكتابة. والثاني هو إيجاد رموزٍ للأعداد

منفصلةٍ عن أشكال ما نعدّه، فبعد فترةٍ من الزمن لم يعد ضروريًا رسم أربعة أشكالِ ماعزٍ وخمسة أشكال دجاجة بل نرسم شكلاً يمثّل أربعة (أربع إشارات تشبه الرقم 1 مثلاً) وبجانبها شكل ماعز وشكلاً آخر يمثّل الخمسة وبجانبه شكل دجاجة. وهذا يعني انفصال العدد عن المعدود، أي التجريد ويَعتبر الكثيرون أنّ هذا الحدث يعني ولادة الرياضيات. لكنّ صحّة مثل هذا الاعتبار تتعلّق إلى حدٍّ كبيرٍ بما نعنيه بكلمة رياضيات وسنعود لهذا الموضوع لاحقًا.

كانت المرحلة التالية هي ولادة الواحدات إذا جاز لنا القول. ونبسّط فكرة ذلك مضحّين بالدّقة اختصارًا فنقول: إنّه بدلاً من كتابة عشرين إشارةٍ تشبه الرقم 1 وبجانبها صورة الماعز أو الدجاج أو سلّة القمح... صار يُعتمدُ على إيجاد رمزٍ لعددٍ من الواحدات المساعدة. فإذا كان بإمكان العين البشريّة المدرّبة أن تميّز ثلاث إشاراتٍ متشابهة دون أن تخطئ في عددها بينما يبدأ الخطأ عندما تصير أربع إشارات فلقد اصطُلح على وضع رمزٍ جديد يمثّل الأربعة. فيمكن لتمثيل العدد 10 مثلاً أن نضع دائرتين صغيرتين تمثّل كلٌّ منهما أربعة و رمزين من الشكل 1 يمثّل كلّ منهما واحدًا. واختيار الأربعة أو الخمسة أو غيرها أمرٌ يتعلّق باعتباراتٍ مختلفة كعدد أصابع اليد أو قدرة العين على تمييز عددٍ من الواحدات المتشابهة "من أوّل نظرة"، الخ... وفي جميع الأحوال لا بدّ من التشديد مرّةً أخرى على أنّ روايتنا هذه هي تلخيصٌ سريعٌ جداً لمجرى الأمور. والإيجاز السريع الآخر هو في انتقالي مباشرةً للحديث عن الأعداد عند السومريين والبابليين.

النظام الستّيني السومري البابلي

أعطى السومريّون، في بداية الأمر، أشكالاً مختلفة تمثّل الأعداد: 1، 10، 60، 600، 3600، 36000. وكانت جميع الأعداد تكتب باستخدام هذه "الواحدات" فالعدد 4957 مثلاً يمثّل بكتابة رمزٍ واحدٍ يمثّل 3600 ورمزين يمثّل كلٌّ منهما 600 ورمزين آخرين يمثّل كلٌّ منهما 60 وثلاث رموز يمثّل كلّ منها عشرة وسبع رموز يمثّل كلّ منها واحدًا وذلك لأنّ:

$$4957 = 3600\times1 + 600\times2 + 60\times2 + 10\times3 + 7\times1$$

ومن الواضح أنّ هذا النظام في تمثيل الأعداد هو مزيج من النظامين العشريّ والستينيّ. وفي نهاية العصر السومريّ على وجه التقريب، وبعد ظهور الكتابة المسماريّة صار التعبير عن الأعداد يتمّ باستخدام شكلين فقط أحدهما يمثّل الواحد إذا كُتِب صغيرًا والستّين إذا كُتِب كبيرًا والآخر يمثّل العشرة. وهذا النظام الستينيّ المطعّم بالعشريّ هو الذي ورثه البابليّون فقاموا من خلاله بإنجاز عملياتٍ كبيرة.

يبلغ ما عُثِر عليه من الآثار المسماريّة في بلاد الرافدين ما يزيد عن نصف مليون رقيم من الصلصال. ومن بين هذه الرقم ثمّة ثلاثمائة رقيمٍ تخصّ الرياضيات مباشرةً وهي أولى الوثائق الرياضيّة البحتة في التاريخ بمعنى أنّها ليست عمليّاتٌ رياضيّةٌ تخصّ التجارة أو شيئًا آخر. بل هي جداول رياضيّة وتمارين ومسائل تعليميّة... وهذه الوثائق تعودُ إلى فترتين متباعدتين نسبيّاً فقسمٌ منها يعود لعهد الملك حمورابي أي ما بين 1800 و1600 قبل الميلاد ومعظمها جداول رياضية تفيد في إجراء عمليّات حسابية (جداول لمربّعات

ومكعّبات الأعداد وغير ذلك...) والقسم الآخر إلى القرون الثلاثة السابقة مباشرة للميلاد أي أن هناك ما لا يقلّ عن ألفٍ وثلاثمائةِ سنة فُقِد فيها تتبّع أثر تطوّر الأرقام وفي خلال هذه القرون الثلاثة عشر ظهر الصفر. ذلك أن المجموعة الثانية من هذه الوثائق تتميّز باستخدام الصفر فيها كأمرٍ طبيعيّ مألوف في حين أن أسلافها من الرُقُم كانت تتميّز بترك فراغٍ في الأماكن التي ينبغي أن يوضع فيها الصفر وهو أمرٌ كان مدعاةً للالتباس وارتكاب بعض الأخطاء. ولعلّه من المناسب، لكي نعطي فكرةً عن الحسابات التي قام بها الحسّابون القدماء، أن نشير إلى أنّ بعض الرقم التي تعود إلى العام 300 قبل الميلاد تتضمّن حساباتٍ تحوي 17 خانة في النظام الستّينيّ ما يعادل عمليّاتٍ على أعدادٍ تحوي 29 رقمًا في النظام العشريّ الذي نستخدمه اليوم. أي أعدادٍ من رتبة ألف مليار مليار مليار تقريبًا!

وبمناسبة الحديث عن الخانات، يبقى أن نشير إلى الإنجاز الأعظم للبابليين وهو استخدام النظام الموضعي أي إعطاء كلّ رقمٍ قيمته المعنويّة بحسب ترتيبه في العدد أي بحسب خانته. ونشرح تطوّر النظام الموضعيّ باختصارٍ شديدٍ مرّةً أخرى على النحو التالي. لنفترض أنّنا لا نملك من الرموز التي تدلّ على الأرقام العشرة الأولى غير الواحد والخمسة. وأننا نكتب واحدًا كبيرًا إذا أردنا أن نشير إلى العشرة وأننا لا نفرّق بين اليمين واليسار في الكتابة. إنّنا نعبّر عن العدد 57 في هذه الحالة مثلاً بكتابة خمس عشرات أي خمس رموز كبيرة للعدد واحد وخمسة واحدة وواحدين أي: 11111511 ومن الواضح هنا أنّ ترتيب وضع الخمسة بين الواحدين والخمس عشرات أو على يمين العدد أو يساره هو أمر ليس من

الأهميّة بمكان فنحن في جميع الأحوال نملك خمسةً واحدةً يجب جمعها مع الواحدَين والخمس عشرات. بل ليس مهمّاً بالأصل أن ترتّب الخمس عشرات بجانب بعضها البعض يكفي أن نعلم أنّ لدينا خمسَ عشرات فالعدد السابق يمكن التعبير عنه أيضًا بالشكل: 1115111. لكنّ الأناقةَ والجمالَ وحدهما ربّما قد جعلا هذا العدد يُكتَب بالشكل الأوّل حصرًا كما وكلّ الأعداد الأخرى. والحال فإنّ ملاحظةً رائعةً قد خطرت ببال عبقريٍّ بابليٍّ لا نعرف اسمه وهي أن يكتبَ رمزًا يعبِّر عن جداءِ العشرة بالخمسة بدلاً من تكرار العشرة خمس مرّات وبما أنّ الضرب عند البابليّين لم يكن له رمز خاص بل كان يُعبَّر عن جداء عددين بكتابتهما الواحد منهما فوق الآخر. فلقد جرى الأمر على هذا النحو. لكن الفكرة الأكثر عبقريّةً هي التي جاءت فيما بعد فلماذا نكتب خمس عشرات؟ نكتب أولاً عدد الواحدات ثم نترك فراغًا مناسبًا ونكتب بعده عدد الخمسات دون أن نكتب أنّها خمسات إذ يكفي وجودها بعد الواحدات كي يُعرَف أنها خمسات ثم نكتب عدد العشرات وهكذا.

هذا هو بالضبط المسار الذي قطعه البابليّون لابتكار النظامِ الموضعيّ مع فارقين اثنين: الأوّل أنّهم فعلوا ذلك في النظام الستينيّ لا العشريّ أمّا هنا فقد اخترتُ العشريَّ للتبسيط (فجعلتُ الخمسة هنا بدلَ العشرة عندهم والعشرة بدل الستّين). أمّا الفارق الثاني فهو أنّ هذه العمليّة التي لخّصتُها بأقلّ من صفحة، وبدت مع ذلك مملّةً لعدد من القرّاء بلا شكّ، قد استغرق تطوّرها ما يقارب الخمس عشر قرنًا فقط.

أما ابتكار النظام الموضعيّ العشريّ وتطويره من قِبَل الهنود، فليس هناك ما يثبت أو ينفي على نحوٍ قاطع أنّه تمّ بشكلٍ مستقلٍّ عن تطوّر النظام الموضعيّ الستينيّ السومريّ البابليّ. وأنا أميل إلى الاعتقاد بأن فكرةَ النظام الموضعيّ ما دامت قد وُجِدَت مرّةً في مكانٍ ما، في فكر إنسانٍ ما، فإنّ ظهورها في مكانٍ آخر بطريقةٍ "مستقلّة" صار شيئًا متوقّعًا ذلك أنها صارت جزءًا من الفكر الإنسانيّ الواحد! وفي جميع الأحوال لا بدّ من الإشارة إلى أنّ شعوبًا عديدةً طوّرت طرقًا مختلفة للعدّ وأنّ التبادلَ التجارِيّ والثقافي بين الشعوب المختلفة كان يحرِّض هذا التطوّر على الدوام هنا وهناك. إنّه لمن الطبيعي في كلّ الأحوال أن أزهار الشجرة وثمارها تظهر بشكلٍ خاصٍّ عند أطراف فروعها. لكنّ ذلك لا يجعل من هذه الفروع شيئًا أفضل من الأغصان الكبيرة ومن الجذع الذي يحمل كامل الشجرة.

النظام الستيني يحال على التقاعد

استمرّ العمل بالنظام الستّينيّ طويلاً لأنّه كان لوقتٍ طويلٍ الطريقة الوحيدة المتوافرة التي تستخدم النظام الموضعيّ (أو الخانيّ). مقابل ذلك ظهرت الكثير من الأنظمة الأخرى للعدّ ولكتابة الأعداد وللقيام بالعمليات الحسابية من أشهرها الأعداد الرومانية التي ما تزال تُستخدم حتّى الآن في ترقيم فقرات موضوعٍ ما مثلاً. والأعداد الرومانيّة تَستخدم كما هو واضحٌ بعض أحرف الأبجديّة اللاتينيّة مثل I وV وX و L واستخدام أحرف اللغة كان شيئًا مألوفًا للدلالة على الأرقام حتّى أنّ الجملة العشريّة نفسها كانت

تستخدم بعض حروف الأبجديّة كرموزٍ للأرقام قبل أن يبدع الهنود في القرن الخامس رموزًا خاصّة ونظامًا لكتابة الأعداد في الجملة العشريّة وهو النظام الذي نستخدمه اليوم مع بعض التعديلات.

كان محمّد بن موسى الخوارزمي الذي عاش في بغداد في القرن التاسع الميلاديّ هو أوّل من دعا عبر كتابٍ له عن الأرقام الهنديّة، وهو كتابٌ فُقِدَ أصلُه العربيّ ولم يصلنا إلا عبر ترجماتٍ لاتينيّة عديدة، إلى تبنّي هذه الطريقة الآتية من بلاد الهند، لكنّ هذا التغيير لم يكن سريعًا جداً مع ذلك واحتاج الأمر إلى قرنين تاليين حتّى تبلغ هذه الطريقة الأندلس التي كانت ما تزال تحت الحكم العربيّ وتأخّر قبولها في أوروبا بعد أن منعت حكومة فلورنسا استخدامها بسبب سهولة التلاعب والتزييف بتبديل الأرقام المتشابهة 0 و6 و9.

كان أحد عيوب الجملة العشريّة الذي أخّر انتصارها وتعميمها هو صعوبة تعاملها مع الكسور فكان النظام الستّيني يمتاز عن العشريّ في هذه الناحية لفترةٍ طويلة وقد لعب عدد من الرياضيين الذين عادةً ما لا يُعطَوا حقَّ قدرهم من الذكر دورًا أساسيّاً في ابتكار طرقٍ للتعامل مع هذه الكسور ومن أبرز هؤلاء الكاشي الذي عاش في القرن الخامس عشر وكان مسؤولاً عن مرصد سمرقند الشهير. وإضافةً لابتكاره الهامّ للطريقة التي نستخدمها اليوم في كتابة الكسور العشرية، كان الكاشي من أوائل من فكّروا، في الشرق، بالأعداد السالبة. في نهاية الأمر ألّف بلجيكيٌّ يدعى سيمون ستيفن S. Stevin كتابًا ضخمًا سمّاه

"فنّ الأجزاء العشريّة" فكان مرحلةً حاسمةً لاحتوائه على أوّل معالجةٍ نظاميَّةٍ للكسور العشريّة الجديدة. أمّا أوّل استخدامٍ للفاصلة العشريّة كما نعرفها اليوم فيعود للاسكتلندي جون نابيير J. Napier عام 1617. يبقى أن نشير إلى أنّ البابليّين كانوا قد عرفوا قبل ذلك بألفي عام بالضبط أي في القرون القليلة السابقة للميلاد بعض أنماط الأعداد العشريّة وهي من الأعداد التي تتراوح قيمتها حصرًا بين الصفر والواحد فكانوا يضعون صفرًا على اليسار (دون استخدام فاصلة) للدلالة على أن العدد هو عدد عشريّ.

لمحة سريعة عن قصّة الأعداد

- 3300 ق.م: أقدم أداةٍ مُكتَشَفَةٍ حتّى الآن استَخدَمَت، على نحوٍ أكيد، المقارنة لعدّ الأشياء.
- 3000 ق.م: الحصيّات المستخدمة في المقارنة تتحوّل إلى أشكالٍ مطبوعة.
- 2800 ق.م: الأشكال المطبوعة تنقسم إلى قسمين، وهذا يعني انفصال العدد عن المعدود فهناك شكل يمثّل العدد وهو يتكرر في أكثر من قطعة مكتشفة؛ وهناك شكل يمثّل المعدود وهو يختلف من قطعة لأخرى.
- 2800 إلى 2300 ق.م: اكتشاف نصوصٍ رياضية كثيرة كاملة هي عبارة عن جداول وتمارين مدرسية موجهة لتعليم كتبة المستقبل.
- 2000: ق.م أوّل نظام عدّ موضعي ستّيني ـ وجود أنظمة عدّ عشريّة غير موضعية ـ إنجاز عمليّات حسابية كبيرة ومعقّدة.

- 300 ق.م: وثائق كثيرة تظهر وجود الصفر في النظام الموضعي الستّيني. ومن شبه الأكيد أن الصفر عُرِف قبل ذلك بكثير لكن وثائق أقدم لم تصلنا أو لم تُكتشف بعد.
- 450 ب.م: أوّل ذكر لنظام العدّ الموضعي العشري فـــي الهند.
- 595 ب.م: أقدم وثيقة هندية تثبت استخدام النظام الموضعي العشري.
- القرن الثامن الميلادي: انتقال النظام العشري إلى الحضارة العربية واستخدامه على نطاق واسع بفضل الخوارزمي.
- القرن الخامس عشر الميلادي: انتشار وانتصار النظام العشري والأرقام العربية في أوروبا.
- القرن التاسع عشر: موضوعات بيانو ونظرية الأعداد.

* * * * * * *

- أدرك المصـــريون ومـــن بعدهم اليونانيون وجود أعدادٍ غير صحيحة وغير كسرية فـــي الوقت نفسه. منها π و $\sqrt{2}$، الخ..
- ظهـــرت الأعـــداد الســـالبة لـــلمرّة الأولى فـــي حلول المعادلات الجبرية واســـتُبعِدَت طويـــلاً قبل أن يقبلها ويفسِّرها ليوناردو فيبوناتشي في القرن الثالث عشر الميلادي.
- ظهرت الأعداد التخيليّة ($\sqrt{-1}$) للمرّة الأولى في القرن الخامس عشر في كتاب عـــن حلول المعادلات الجبرية للإيطالي كاردانو. واستُخدمت تجاوزًا في حلول هذه المعادلات حتّى برهن غاوس النظرية الأساسية فـــي الجبر عام 1799.

الملحق الأوّل

أنظمة العدّ والطريقة الموضعية

هل أنت فاهمٌ لعجيبة التنفسّ التي تتمّ فيك؟

ميخائيل نعيمة

غالبًا ما تكون معرفتنا لأقرب الأشياء إلينا وألصقها بنا سطحيّةً ومحدودة. يستخدم كلُّ الناس الأعدادَ كلَّ يوم. فيعدُّون الأشياء ويجمعون ويطرحون ويضربون ويقسّمون.

عندما نعطي سائق سيّارة الأجرة خمسين ليرة فيعيدُ لنا خمسةً وعشرين أو عشرين... فإنّه يجري ببساطةٍ عمليّة طرح. ونحن نعرف بفضل العادة والتمرين نتيجة الحساب بسرعةٍ كبيرة لكنّنا نضطّر من أجل عملياتٍ أصعب بقليل لاستخدام الآلة الحاسبة أو الورقة والقلم.

لنفرض أنّ أحدنا يساعد طفلاً صغيرًا في تعلّم عمليّة الطرح. ولنفرض التمرين التالي مطروحًا للحلّ: 76- 93. (الكتابة من اليسار لليمين، بالنسبة للمعادلات والعمليّات الحسابيّة)

نعلّم أولادنا أنّ الطرح يجري وفق المنازل. والأسهل أن نرتّبَ العددين أحدهما فوق الآخر على النحو التالي:

93

- 76

ولإجراء عمليّة الطرح نبدأ من اليمين. وبما أنّ الثلاثة أصغر من الستّة، فلا بدّ أن "نستلف" من التسعةِ واحدًا فتصيرَ التسعة ثمانيةً وتصيرَ الثلاثة ثلاثة عشر... هذا ما تعلّمه كلّ المعلّمات تقريبًا في الصفوف الابتدائية الأولى.

المؤسف في الطريقة التي نتعلّم بها الرياضيات هو اهتمامنا بتقنية (خوارزمية) العمليّة أكثر من اهتمامنا بفكرتها. فلو طرح أحد الطلاب الأذكياء السؤال التالي: لماذا نبدأ من اليمين وليس من اليسار؟ ولماذا تصبح التسعة ثمانيةً عندما نأخذ منها واحدًا ولا تصير الثلاثة أربعة عندما نضيف إليها هذا الواحد نفسه؟ لكان الجواب في بعض الحالات، وربّما في كثير من الحالات: احفظ الطريقة ودعكَ من الأسئلة. إنّني أريد أن أنتهزَ هذه الفرصة، وقبل الوصول إلى الفصل الخاصّ بتعليم الرياضيات، لأقول إنّ تعليم الرياضيات هو نقل أفكارٍ لا آليات عمل حسابيّة أو غير حسابية. هو فهمُ الجوهر لا التطبيق، الأسباب لا النتائج: إنّ السؤال الذي يجب أن يُطرح على الدوام في تعليم الرياضيات هو "لماذا" فإن كان الطلاب لا يطرحونه فإنّ علينا أن نطرحه عوضًا عنهم و أن نجيبهم عليه. يمكن للطالب أن يتعلّم إنجاز العمليّة على نحوٍ آليّ ويبرع بها دون أن يعرف شيئًا عن جواب هذا السؤال المطروح أعلاه. وهذا ما يحدث في أحيان كثيرة مع الأسف. إنّ الطالب في هذه الحالة لا يتعلّم الكثير من الرياضيات ولربّما كان من الأيسر له في هذه الحالة أن يكتفي باستخدام الآلة الحاسبة.

إنّ الواحد المُستلف من التسعة ليس واحدًا بل عشرة لأنّ التسعة في الأصل هي تسعين وهذا ما نقوله صراحةً في قراءتنا للعدد (ثلاثة وتسعين) والحال فإنّنا عندما نأخذ من التسعين عشرةً يبقى لدينا ثمانين. وعندما نضيف هذه العشرة إلى الثلاثة تصبح ثلاثة عشر.

تقوم فكرة النظام الموضعيّ على ما يلي: نستخدمُ عددًا محدودًا من الرموز، التي لا يهمّ كيف نختارها شرط أن نتّفق عليها جميعًا وأن نعتاد استخدامها دون خلطٍ والتباس، للتعبير عن الأعداد. يمكن لعدد هذه الرموز أن يكون اثنين أو ثلاثة أو أربعة... أو أيّ عددٍ نشاء شرط أن يكون أكبر من الواحد. ولنوضح ذلك في النظام العشريّ الأكثر إلفةً لنا.

نحتاج للتعبير عن أيّ عددٍ في النظام العشريّ المعروف إلى تسعة رموزٍ مختلفة يمثّل كلٌّ واحدٍ منها أحد الأعداد الطبيعيّة التسعة الأولى، إضافةً إلى رمزٍ يمثّلُ الصفر. وهذه الرموز هي ما يسمّى في الغرب (أي في اللغات اللاتينية) الأرقام العربيّة (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0) (والتي نستخدمها في هذا الكتاب) في حين تستخدم اللغة العربيّة في كثيرٍ من الأحيان الأرقام الهنديّة (١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ٠) وذلك لانسجامها مع اتّجاه الكتابة في اللغة العربيّة، وهو من اليمين إلى اليسار، أكثر من الأرقام العربيّة نفسها، التي توافق اتّجاه الكتابة في اللغات الأوروبيّة.

لقد تعمّدتُ استخدام كلمة رمزٍ في تعريف هذه "الكائنات" فالرمز يخدم بأن يشيرَ إلى شيءٍ آخر ويأخذ قيمتَه ممّا يرمز إليه. فالرمز 7 مثلاً لا يعني دومًا سبعة فهو في الكتابة 76 يعني سبعين وفي الكتابة 788 يعني سبعمائة وفي الكتابة 0.7 يعني سبع أجزاء من عشرةِ أجزاءَ متساوية من

الواحد. يعني هذا باختصار أنّ قيمة الرمز تتحدّد بأمرين: أولاً الرمز نفسه وثانيًا مكان وجوده في الكتابة الدالّة على العدد المقصود. هذا بالطبع طالما كنّا نتحدّث ضمن نظام عدٍّ واحد أمّا على نحوٍ عامٍّ أكثر فإنّ قيمة الرمز تتحدّد أيضًا بنظام العدّ الّذي نستخدمه فقيمة الرمز 7 في العدد 76 لا تساوي سبعين إذا كان الحديث يجري في نظام العدّ الثماني بل تساوي ستّة وخمسين! وهكذا نصل إلى ما نودّ شرحه في هذا الملحق.

في النظام العشريّ لدينا تسع رموز (إضافةً للصفر) ونحن نستخدم هذه الرموز للتعبير عن الأرقام التسعة الأولى كما أسلفنا وعندما نريد أن نعبّر عن العدد العاشر (أي العشرة) فإنّنا لا نجد رمزًا خاصّاً ونحتاج إلى طريقةٍ نستخدم فيها الرموز المعروفة. وينطبق الأمر على الأعداد التالية للعشرة...

يمكن شرح الطريقة الموضعيّة كما يلي: يُعبَّرُ عن أيٍّ عدد في نظام ما (وليكن العشريّ مثلاً) باستخدام كلّ أو بعض الرموز التسعة ورمز الصفر مرتّبةً بالطريقة التالية: ما دامت العشرة هي أساس هذا النظام فإنّنا نعتبر قوى العشرة (أي الواحد 10^0 ، والعشرة 10^1 والمائة 10^2، والألف 10^3، الخ...) واحداتٍ أساسيّة ونقسّم العدد إلى أعدادٍ من هذه الواحدات. فالعدد أربعةٌ وثلاثون وستّمائةٍ وألفين هو (كما يُقرأ ويكتب تمامًا) ألفان وستُّ مئاتٍ، وثلاث عشراتٍ وأربعة، أي "أربعةُ وحدان". يمكن بابتكار رمزٍ للعشرة وآخر للمائة وثالث للألف... أن نستطيع كتابة العدد السابق. لنفرض أنّ مثلّثًا صغيرًا يعني عشرة ومربّعًا صغيرًا يعني مائة ودائرةٌ صغيرة تعني ألفاً. عندئذٍ يُمثَّلُ العدد السابق بالشكل التالي:

○ ○ □ □ □ □ □ □ △ △ △ 1111

من الواضح هنا أنّ تغيير ترتيب هذه الرموز لا يغيّر من قيمة العدد الّذي نريد التعبير عنه فسيكون لدينا على الدوام ثلاثة مثلّثاتٍ مثلاً حتّى لو كان أحدها بين المربّعات وآخر بين الدائرتين والثالث على أحد الطرفين. لكنّ الحفاظ على هذا الترتيب والاصطلاح على كتابة الواحدات أولاً (بدءًا من اليمين) والعشرات ثانيًا والمئات ثالثًا... يتيح لنا أن نكتفي بكتابة عدد هذه الواحدات أو العشرات أو المئات... ولن يبقى ثمّة داعٍ من بعد للاحتفاظ برموز المربّع والدائرة والمثلّث أو غيرها. فعندما نكتب 2634 فإنّنا نعني (بحسب الاصطلاحات السابقة) دائرتين وستّ مربّعات وثلاث مثلّثات وأربع واحدات وبالتالي ألفين وستّ مئاتٍ وثلاث عشراتٍ وأربعة. ونحن نعلم ذلك بتمييزنا لأماكن وجود الرمز 2 والرمز 6، الخ...

ولكن ماذا لو أردنا كتابة العدد السابق في النظام الثمانيّ مثلاً؟

ستكون الواحدات الأساسيّة هي قوى الثمانية أي الواحد 8^0 والثمانية 8^1 والأربعة والستّين 8^2 والخمسمائة واثنا عشر 8^3، الخ. ولن نحتاج إلى رمزٍ خاصٍّ للثمانية لأنّنا سنكتبها بالشكل: 10 فالرمز 0 يعني هنا صفرًا من الواحدات والرمز 1 يعني ثمانيةً واحدة. فحين نكتب 5112 في النظام الثماني فهذا يعني أنّ لدينا واحدين وثمانية واحدة وأربعة وستّون واحدة (لأنّ 64 هي 8) وخمس مرّاتٍ 512 (التي هي 8) وهذا يقابل $2634 = 512 \times 5 + 64 + 8 + 2$ ونعبّر عن ذلك بالقول إنّ الكتابة 5112 في النظام الثمانيّ تعبّر عن نفس العدد الذي نكتبه 2634 في النظام العشريّ. ونختصر ذلك كما يلي: $(2634)_{10} = (5112)_8$.

هناك أنظمة عدٍّ بقدر ما نشاء. وقد يسأل سائلٌ عن كيفية كتابةِ عددٍ أعطيَ في النظام العشريّ، في نظامٍ آخر. أي كيف نعرفُ مسبقًا أن 2634 في النظام العشريّ يُكتَبُ 5112 في النظام الثمانيّ؟ فهذا موضوعٌ آخر ليس شديد التعقيد لكنّه ليس من اختصاص هذا الكتاب على جميع الأحوال.

تُقدِّم دراسة نظم العدّ المختلفة العديد من الفوائد. فنظام العدّ الثنائي، على سبيل المثال، هو الوسيلة الرئيسة التي تمكّننا من ترجمة كلّ المعلومات إلى لغة الكهرباء أو الإلكترونات (لأنّ التيّار الكهربائي يمكن أن يمرّ أو أن ينقطع، وليس له احتمال ثالث) وبالتالي من الاستخدام الفعّال للكمبيوترات الحديثة. وهذا النظام يستخدم رمزين فقط: 0 و 1 فالاثنين في النظام الثنائيّ تكتب: 10 أمّا العشرة فهي: 1010 (ولك عزيزي القارئ أن تحاول التحقّقَ من ذلك بنفسك!)

ثمّة إمكانية لتطبيقاتٍ طريفة في ما يسمّى الرياضيات المسليّة (أو بالأصحّ التسليات الرياضية) لأنظمة العدّ. نستطيع تعلّم هذه اللعبة على سبيل المثال:

يمكنكَ من خلال الجدول التالي أن تعرف عمر أيّ شخص بطريقةٍ بسيطة جدّاً إذا سألته عن الصفوف في هذا الجدول التي يظهر فيها الرقم الدالّ على عمره.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31	1
2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30, 31	2
4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30, 31	4
8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31	8
16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31	16

إنّ هذا الجدول كافٍ للتعرّف على عمر أيّ شخص لا يزيد عن 31 سنة. أمّا المبدأ الّذي وُضِعت وفقه الأعداد في الصفوف المختلفة فهو بسيطٌ جداً:

لنفرض أنّ عمر شخص ما هو 28 سنة. إن هذا العدد يكتب في النظام الثنائيّ بالشكل: 11100 لأنّه يساوي $1\times16+1\times8+1\times4+0\times2+0\times1$ فنكتبه في الجدول إذًا في صفوف الأربعة والثمانية والستّة عشر (وهي الأعداد المضروبة بواحد في الصيغة الأخيرة) ولا نكتبه في صفي الواحد والإثنين (المضروبين بصفر في الصيغة نفسها). نسأل الشخص الآن عن الصفوف التي يظهر فيها عمره فيخبرنا أنها الثلاثة الأخيرة (ليس من الضروري أن نكتب العمود اليمين لأنّه موجودٌ ضمنًا في العمود الآخر فالأعداد الظاهرة في أقصى اليسار هي نفسها أعداد العمود اليمين. وهذا يساعدنا في ألا يكشف الشخص الذي لا يعرف الكثير من الرياضيات لعبتنا) نجمع إذًا 4+8+16 ونخبره أنّ عمره هو 28 سنة.

تستطيع عزيزي القارئ، كتمرينٍ مفيد، أن تضيف سطرًا آخر إلى الجدول يمكّنك من حساب الأعمار بهذه الطريقة حتّى 63 وما عليك من أجل ذلك سوى أن تكتب الأعداد التالية (32، 33، 34..الخ) في النظام الثنائي. إنّ الخانة الأولى (الآحاد) في هذا النظام تقابل السطر الأوّل في الجدول والخانة الثانية (مضاعفات الإثنين) تقابل السطر الثاني، الخ... لنفرض مثلاً أنّنا وصلنا إلى العدد 37 الذي يُكتب 100100 نسجّله في جدولنا في السطرين الثالث والسادس (المقابلين

للرمز 1 في الكتابة الثنائية) ولا نسجّله في السطور الأخرى، ثمّ ننتقل إلى العدد التالي وهكذا.. وإذا أضفت سطرًا آخر أيضًا فستستطيع بالتأكيد أن تلعب هذه اللعبة مع جدّك إن لم يكن معمّرًا يزيد عمره على 127 عامًا!

بحثا عن الجمال

إنّ كلّ ما أتينا على وجه التقريب، سواء كانت فطرية او نتاج تركيبنا الواعي، هي تطبيقات لمفاهيم هندسيّة.

والضرورة الهندسية هي نفسها الضرورة التي نخضع لها، منغلقين، كخلائق، في الزمان والمكان.

سيمون ويل

"لا تدَعوا من يجهل الهندسة يدخل بابي"

أفلاطون

عليّ أن أعترف بادئ ذي بدء أنّني قد اقتبستُ عنوان هذا الفصل من عنوانِ كتابٍ يروي قصّة الموضوعة الخامسة لإقليدس. ولا أعتقد أنّني كنت سأجد عنوانًا أفضل. فجمال الهندسة سيظلّ مشعّاً على الدوام. ومع أنّ الهندسة كفرعٍ مجرّد من الرياضيات la gomtrie، تختلف كثيرًا عن المعنى الدارج للهندسة على أنّها فنّ العمارة architecture، فيمكن مع ذلك لمن أراد أن يرى هذا الجمال مجسّدًا أن يزور أهرامات الجيزة على سبيل المثال.

تروي أهرامات مصر، عن هندسة المصريّين القدماء، أكثر بكثير مما نستطيع أن نرويه ههنا. وتبقى عمارتها سرّاً كبيرًا يجعلنا ننحني أمام

عظمتهم ويدعونا إلى المزيد من التواضع. إننا لن نعرف أبدًا على ما يبدو، مهما تعدّدت الفرضيات والنظريات كيف بُنِيتِ الأهرامات. لكنّنا نعرف أنّها من الإنجازات الهندسيّة العظيمة لا قديمًا فقط، بل وحديثًا أيضًا. فممّا لا شكّ فيه أنّ الدقّة التي نراها في بناء هرم خوفو وفي توجيهه نحو الجهات الأربعة هي أقرب إلى المعجزة منها إلى الواقع. لكنّها مع ذلك واقعٌ يستطيع كلُّ واحدٍ منّا الذهابَ لرؤيته في صحراء مصر ما دام تلوّث البيئةِ لم يخرّبه بعد!

نعلم، لا من الأهرامات فقط، بل وكذلك من بعض الوثائق على قلّتها، أنّ الهندسة، أو على الأقلّ معرفةَ بعض الأشكال الهندسيّة المستوية والفراغيّة وحساب مساحاتها وحجومها، كانت أكثر تطوراً في مصر القديمة منها في أيّ مكانٍ آخر. ومن أهمّ هذه الوثائق برديّةٌ تعود إلى القرن السابع عشر قبل الميلاد وتسمّى بردية ريند نسبةً إلى البريطاني الذي "اشتراها" في الأقصر (قرأت في ثلاثة مصادر على الأقلّ أنّ ريند هذا قد اشتراها لكنّ أيّاً من هذه المصادر لم يذكر ممّن اشتراها فهل هناك من يملك حقّ بيعها حتى يملك ريند أو غيره حقَّ شرائها؟ لا ننسَ أيضًا أنّ مصر كانت خاضعةً للاحتلال البريطاني وقتذاك) وبرديّة ريند هي وثيقةٌ رياضيّة شديدةُ الأهمّيّة وفيما يخصّ الهندسة نقرأ فيها بعض المسائل ومنها:

المسألة 51: مثالٌ على حساب حقلٍ مثلّث. إذا قيل لك ما هي مساحة مثلّث ارتفاعه 10 فيرج (الفيرج لفظ يدلّ على واحدة طولٍ عندهم) وقاعدته أربعة فيرج؛ فإنّك تحسب على هذا الشكل:

تأخذ نصف الأربعة أي 2 لكي تجعله قائمًا (أو لتجد منه مثلثًا قائمًا) وتضرب 10 بـ 2 فتكون لك المساحة.

وفي المسألة التالية من نفس البرديّة نجد حسابًا لمساحة شبه منحرف. أمّا الإنجاز الأكبر في حساب المساحات فهو حساب مساحة الدائرة الذي نذكر أيضًا كيف يجري بحسب هذه البرديّة:

طريقةٌ لحساب قطعةِ أرضٍ دائريّة قطرها 9 فيرج. فكم تكون مساحة أرضها؟ (من الأكيد أنه لم تكن عندهم علامة الاستفهام لكنّني أضعها تجاوزًا)

عليك أن تطرحَ من التسعةِ واحدًا، يبقى 8. ثم تضاعف الـ 8 ثمانية مرّات فتحصل على 64 (تذكر البرديّة طريقة الضرب) فمساحة الأرض هي ستٌّ عشراتٍ وأربعة.

ويوضح بقيّة النص أنّ الواحدَ المطروح من التسعة هو تِسعُ التسعة فالخوارزمية المستخدمة هي تربيع ثمانيةِ أتساعِ نصف القطر، أي حساب مساحة المربّع الذي طول ضلعه ثمانية أتساع نصف قطر الدائرة وهي طريقةٌ تقريبيّة جيّدة جداً تقابل إعطاء قيمةٍ للعدد π تساوي 3.1605 (كانت بقيّة الشعوب المعاصرة لتلك الفترة تعطي نسبة محيط الدائرة إلى قطرها القيمة 3) يبقى أن نذكر أنّ المصريّين قد حسبوا بنفس الطريقة حجم الأسطوانة وذلك بضرب مساحة القاعدة (المحسوبة وفق الخوارزميّة السابقة) بارتفاع الاسطوانة.

وقد استطاع المصريّون أيضًا حساب حجم الهرم وحجم جذع الهرم وتوصّلوا (دون استخدام الرموز بالتأكيد) إلى ما يقابل الصيغة: $v = h/3(a^2 + ab + b^2)$ في حساب جذع الهرم الرباعيّ.

يمكّننا التدقيق في المسائل السابقة أن نستنتج بعض الحقائق شبه الواضحة:

١- من الواضح تمامًا أن اهتمام المصريّين بالهندسة كان ينطلق من الحاجة لحساب مساحات الأراضي بالدرجة الأولى. وحساب حجوم بعض الأبنية ولا سيّما الأهرامات.

٢- لم يتركْ لنا المصريُّون (ولم يكنِ البابليُّون بأفضل من هذه الناحية) أيّ أثرٍ يخبرنا عن كيفية توصّلهم إلى طرق حسابهم للمساحات والحجوم. فكلُّ ما نراه هو تعليماتٌ عن طرق تنفيذِ خوارزمياتٍ لا نعلم من أين أتت. والسؤال الذي يطرح نفسه ويبقى محيّرًا نوعًا ما هو: هل كانت الخبرةُ هي وحدُها مصدر هذه القوانين أم أنّ هناك استنتاجات وبراهين حقيقيّة، بالمعنى الإقليديّ للكلمة لم تصلنا منهم؟

٣- إنّ بعض التأمّل الإضافي في كون الطريقة التي تعطي مساحة الدائرة هي طريقة تقريبيّة، بينما نجد قانونًا صحيحًا لحساب حجم جذع الهرم، مع ملاحظةِ أنّ المسألةَ الأولى هي مسألةٌ صعبةٌ بالتأكيد في ذلك الزمان وأنّ المصريّينَ كانُوا يمتلكونَ خبرةً كبيرةً في ما يخصُّ الأهرامَ خصوصًا، يجعلُنا نعتقدُ أنَّ الخبرةَ الحسابيّةَ هي التي أوصلتْهم إلى هذه الطرق وليس البرهان الرياضيّ الهندسيّ. يبقى أن نقولَ أنّ هذا الأمر لا يقلّل مطلقًا من شأن هؤلاء الروّاد الذين مهّدوا الطريق بلا شكّ لمن سيخلفهم في تطوير الهندسة ولا سيّما الإغريق.

إنّ الثروات العظيمة من الألواح المسماريّة السومريّة والبابليّة ومن أوراق البردي المصريّة ومن آثارِ غيرهما من الحضارات قد ضاعَ معظمها في غياهب التاريخ، وما نسيته عادياتُ الزمان منها يتذكّرُه اليوم من يدّعُونَ كونَهم أهلَ العلم والحضارة والديمقراطيّة وما سلُمَ من الحرقِ والنهبِ في متحفِ الإسكندريّة ومكتبتها في سالف الأيّام، يُجهَزُ عليه في بغداد اليوم. ومع ذلك فثمّةَ ذاكرةٌ أصدق من كلّ الوثائق وهي ذاكرةٌ تسجّل كلّ شيء ولا تنسى شيئًا، وهي إلى ذلك ذاكرةٌ تبقى ما دام الإنسان موجودًا على الأرض، ولعلّها تبقى حتّى بعد الإنسان. وهذه الذاكرة ما هي بكلّ بساطة سوى ما يسمِّيه يونغ اللاوعي الجمعي للبشريّة.

هكذا، فقد انتشرَ طلاب العلم من اليونانيّين، حتّى من قبل أن يُلحِق الأسكندر المقدونيّ معظمَ العالم القديم بشبه الجزيرة اليونانيّة الصغيرة، يجوبون مصر والشام وبلاد الرافدين ينهلون منها علوم تلك الحضارات. وممّا يذكره التاريخ أن تاليس الذي عاش بين القرنين السابع والسادس قبل الميلاد والذي يعتبر المؤسّسَ الأوّل لكلّ العلوم في اليونان القديمة، والذي يعرفه جميع طلاب المدارس الإعدادية من خلال النظريّة الشهيرة المنسوبة إليه (نظريّة نسب الأطوال التي يحدّدها قاطعان مختلفان لمجموعةٍ من المستقيمات المتوازية)، قد عاش عدّة سنواتٍ في مصر وأنّ فيثاغورس الأكثر شهرةً منه بالتأكيد والذي كان فيلسوفًا وصاحبَ مذهبٍ دينيّ تصوفي أكثر منه عالمًا فحسب، قد عاش سنوات طويلة من عمره في مصر وفي بابل قبل أن يؤسِّس مدرسته الفيثاغورية في سيراكوز والتي تركت أثرًا كبيرًا ولعبت دورًا مهمّاً في تطوّر الهندسة

فيما بعد. وباختصارٍ أكبر وببساطةٍ شديدة نستطيع أن نقول أن بذرة الهندسة التي اختمرت خلال وقتٍ طويلٍ في مصر كانت جاهزةً لتنتش في اليونان.

لقد كان التطوّر الكبير للحساب وللهندسة في حضارات الشرق القديمة نتاجًا للحاجة العمليّة كما أسلفنا مرّاتٍ عديدة، أو أنّ هذا ما تجيز لنا قوله الدراسات الآثارية حتّى الآن على الأقلّ. أمّا الرياضيّات بالمعنى العميق للكلمة فلم تكن قد وُلِدت بعد.

يمكن أن نشبّه النقلةَ النوعيّة التي حصلت عند انتقال المعارف "الرياضيّة" البابليّة والمصريّة إلى اليونان بالمقاربة التالية: يزور سائحٌ أجنبيٌّ قريةً صغيرةً نائية في بلدٍ ما يزال بعيدًا عن "الحضارة". يقدِّمُ له فلاحٌ مضيافٌ إبريقًا فخّاريّاً ليشرب منه ماءً زلالاً. فبالنسبة للفلاح، لا يشكّل الإبريق أكثر من أداةٍ صنعها جدّه وما زال يستخدمها هو ليشرب الماء. لكنّ الزائر الغريب يرى فيه قطعةً فنيّةً في غاية الجمال، وموضوعًا لدراسة كيفية صنعه وتكوينه وكيفية حفظه لبرودة الماء، الخ... ومن الطبيعيّ جدّاً أنّنا نجهل في كثيرٍ من الأحيان القيمة الجماليّة والعمق الكبير لأشياء نستخدمها كلّ يوم، تمامًا كما لا نكتشف مقدار محبّتنا لشخصٍ ما إلا حين يفارقنا، أو كما يقول المثل: "الصحّة تاجٌ على رأس المُعافى لا يراه إلا العليل"!

هكذا فقد تعب المصريّون ودخل اليونانيّون على تعبهم ورأَوا في المعارف التي ورثوها شيئًا لم يكن لمبدعيها أنفسهم أن يرَوه فيها. ومن هنا بالضبط وُلدت الرياضيات.

لقد أوصلت الخبرة العمليّة عبر آلاف السنين كتّاب الألواح المسمارية وأوراق البردي المصريّة إلى طرق حساباتهم التي لم تعْدُ، على روعتها وعظمتها، أن تكونَ مجرّد وصفاتٍ جاهزةٍ لحلّ مسائلَ مختلفةٍ: إذا كنتَ تريد الحصول على مساحة الشكل الفولاني فاعمل ما يلي... دون أيٍّ تفسيرٍ لكيف ولماذا وما هو الإثبات عن صحّة كلامك... وهذا السؤال الأخير هو بالتحديد ما طرحه على أنفسهم تاليس وفيثاغورس وأفلاطون، وما كان لهم إلا أن يطرحوا هذا السؤال لأنّ هذه الوصفات الجاهزة كانت غريبةً على فكرهم،... وصولاً إلى إقليدس الذي كان كلّ شيءٍ قد نضج في زمانه ولم يبقَ غير القطاف.

يشبه ما تركه المصريّون والبابليّون، على امتداد ألفٍ ونصف الألف من السنين أو أكثر، مجموعةً من الحجارة الكبيرة والصغيرة، ومن المواد الأوليّة الضروريّة الأخرى اللازمة للبناء ويشبه ما فعله الإغريق خلال أربعمائة عام تجميع هذه المواد في بناءٍ سيظلّ فريدًا من نوعه لألفين تاليين من السنين! وهذه الصورة في تركيب الحجارة المختلفة لإشادة بناءٍ إنّما تكرّرت مرّات كثيرة في تاريخ العلم فكلُّ قفزةٍ علميّةٍ كبيرةٍ وحاسمة ما هي في الواقع إلا بناء جديد من حجارةٍ كثيرةٍ كانت تنتظر من يجمعها وهذا ما قاله نيوتن مرّةً حين شبّه نفسه بطفلٍ صغير يلعب على شاطئ البحر فيلتقط صدَفةً من هنا وحجرًا ملوّنًا من هناك ويشكّل منها مادّة بنائه ومن الجدير ملاحظته أنّ هذا البناء الّذي وضعه نيوتن والذي كان ميلادًا للعلم الحديث قد طرحه في كتابٍ اختار له نفس الاسم الّذي اختاره إقليدس لكتابه: المبادئ!

إن الفكرة الأساسيّة الأولى التي يقوم عليها البناء الهندسيّ هي التجريد. فالدائرة هي الدائرة وليست قطعةً من الأرض لها شكل معيّن وليست عجلة عربةٍ ولا شيئًا آخر. وهي هي سواء كانت كبيرة أم صغيرة فخواصها في الحالة الأولى هي نفس خواصها في الحالة الثانية. وهنا تأتي الفكرة المهمّة الثانية وهي أنّ خواص الدائرة وكلّ شكل هندسي آخر هي خواص ثابتة يمكن استنتاجها بشكلٍ منطقيّ وابتداءً من حقائقَ معروفة سوف تصنّف فيما بعد وفق فئتين كبيرتين: المسلّمات (أو الموضوعات) والبديهات. أمّا مجموعة هذه الاستنتاجات فهي التي ستشكّل ما ندعوه بمجموعة النظريّات والبراهين التي تشكّل البناء الهندسيّ.

تطوّر هذا البناء شيئًا فشيئًا وقد بدأه تاليس العائد من مصر كما أسلفنا ووضع عليه اللمسات الأخيرة إقليدس الذي عاش في الأسكندرية أيضًا. ومثل كلّ بناءٍ آخر احتاج بناء الهندسة الإقليدية إلى الكثير من التشييد والهدم والإصلاح والتشذيب لكي يخرج في نهاية الأمر في الشكل الذي منحه إيّاه إقليدس.

في وقتٍ ما من القرن الرابع قبل الميلاد وضع إقليدس إذًا كتاب المبادئ الأمر الذي يعتبر بلا شكّ حدثًا كبيرًا ومنعطفًا مهمّاً في تاريخ البشرية. لكنّ من الأكيد بالمقابل أنّ أحدًا من "كبار" ذلك الزمان، أعني من كبار الأباطرة والملوك والحكّام والقوّاد، الزمنيّين وغير الزمنيّين، الذين ذهبت جميع أعمالهم وبقي عمل إقليدس، ما كان ليهتمّ بمثل هذا الحدث وكان الناس يعيشون حياتهم العاديّة في التجارة والصناعة والزراعة والطعام والشراب والزواج والموت والولادة والفرح والحزن... أعتقد أنّ علينا

أن نتعلّم درسًا ما هنا فالحياة اليوميّة التي تجري بانتظامٍ تخفي في طيّاتها أحداثًا صغيرةً لكنّها خالدة. وقد لا نسمع بها أبدًا رغم كلّ وسائل إعلامنا الحديثة التي لا تنقل لنا إلا أخبارًا مبتذلة وسيّئة. فإمّا عن الحروب والمجاعات والأوبئة وإما عن الموضات والصرعات وآخر الترّهات. لكنّ علينا أن نثقَ بأنّ ما يبقى وما يدفع البشرية إلى الأمام إنّما يجري على الدوام في الخفاء وأنّ قلّةً من الناس يقدِّرون، حتّى بعد آلاف السنين، مقدار أهميّته للعالم ولتقدّم الفكر والمعرفة.

لا شكّ أنّ محاولاتٍ قد جرت قبل إقليدس. لكنّ الأكيد بالمقابل هو أنّ إقليدس كان المهندس الأوّل الذي أخرج إلى العالم أوّل بناء كبيرٍ في مدينة الرياضيّات العتيدة. ومع أنّ الكثير من التشذيب والترميم قد طال هذا البناء مؤخّرًا إلا أنّه يبقى بكل تأكيد البناء الّذي صمّمه إقليدس. فما هو كتاب المبادئ أو ما هي الهندسة؟

سبق أن شبّهت الهندسة ببناءٍ كبير وسأفصّل ذلك كما يلي.

نستخدم في أيِّ بناءٍ عددًا محدودًا من الموادّ الأوّليّة. إنّها أشياء نشتريها جاهزةً أو نجدها في الطبيعة ونستخدمها كما هي من أجل إشادة البناء. رمل، إسمنت، ماء، حجارة، حديد، الخ ... يقابل هذه المواد في الهندسة ما نسمّيه الكلمات أو المفاهيم الأساسيّة: النقطة، المستقيم، المستوي، يقع بين.

يقوم كلّ بناءٍ إسمنتيٍّ حديث على مجموعةٍ من الأعمدة الضخمة المسلّحة التي تسمّى أساسات والتي تحمل البناءَ كلّه. يقابل هذه الأساسات في الهندسة ما نسمّيه اليوم الموضوعات والتي نعتمد عليها لبرهان كافّة

النظريّات والنتائج القادمة فهي بمعنًى ما تحمل كلّ البناء الهندسيّ أيضًا.
أمّا الموضوعات فـي الهندسة الإقليديّة فهي التالية:

١- بين كل نقطتين يمرُّ مستقيم واحد.

٢- يمكن مدّ أي مستقيم من نهايتيه بالقدر الذي نشاء.

٣- يمكن من أيّةِ نقطةٍ إنشاء دائرةٍ نصف قطرها أيّ طول معطى.

٤- جميع الزوايا القائمة متساوية.

٥- من نقطة غير واقعة على مستقيم يوجد موازٍ واحد لهذا المستقيم.

الهندسة	بناء اسمنتي
المفاهيم الأوليّة (نقطة، مستقيم، مستوي)	المواد الأوليّة (رمل، إسمنت، حديد، ماء)
المسلّمات أو الموضوعات	الأساسات
التعاريف (المُصاغة بدءًا من المفاهيم الأوليّة)	اللبنات (المشكّلة من المواد الأوليّة)
البراهين	الأعمدة
المبرهنات والنتائج (الحقائق الهندسية)	الطبقات
البرهان الذي لا يستند على الموضوعات أو على نظريات مثبتة مسبقًا غير مقبول	السطح (الطبقة) الذي لا يستند على الأعمدة أو الأساسات يسقط.

لعلّ هذه المقارنة لا تخلو من فائدةٍ فـي سبيل فهمٍ أعمق للهندسة. وأعتقد أيضًا أنّ مدرّسي الرياضيات يستطيعون أن يفيدوا منها كثيرًا فـي تعريف طلابهم فـي الهندسة على نحوٍ أفضل وبالتحديد فـي "بناء الهندسة" أكثر مما فـي دراستها كمجرّد معلوماتٍ لا يربطها أيّ رابط. ففـي واقع الحال، يمكن بقليلٍ من الجهد والتحضير، وانطلاقًا من هذا الجدول البسيط، إعادة صياغة منهاج الهندسة الإقليدية على نحوٍ يبنيها فيه الطلاب بأنفسهم بمساعدة المدرّس.

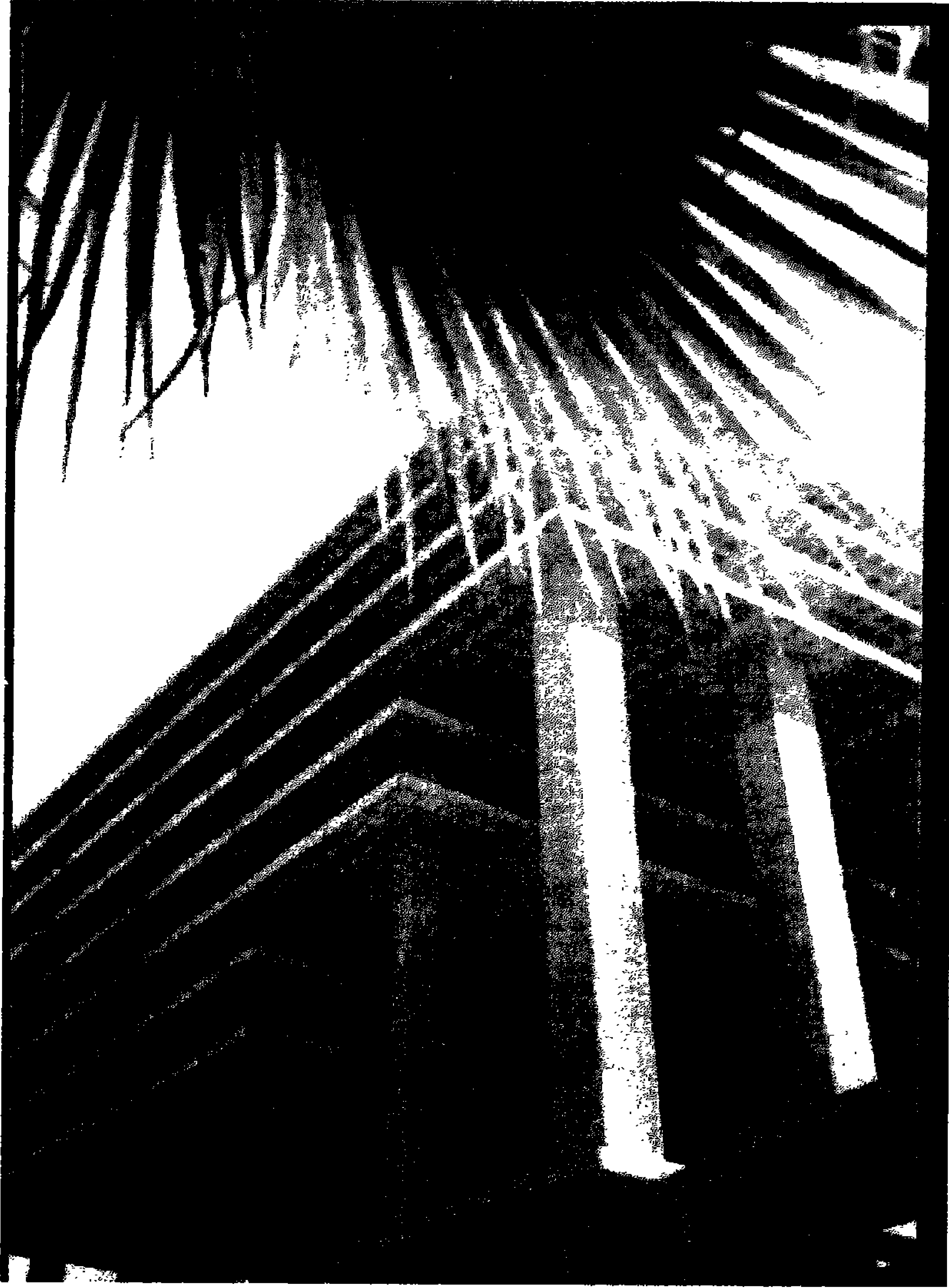
نلاحظ ورود كلماتٍ ضمن هذه الموضوعات لا نعرف معناها فيجب تعريف الدائرة على سبيل المثال، وبدلالة المفاهيم الأوليّة (النقطة، المستقيم، ...) قبل أن يكون من حقّنا استخدام الكلمة في أيّة عبارة. والحال فلا بدّ من إيراد بعض التعاريف المناسبة قبل طرح الموضوعات (تمامًا كما يجب ربط قضبان الحديد وخلط مزيج الإسمنت والرمل والماء قبل وضع الأساسات) فتعرّف الدائرة مثلاً بأنّها مجموعة النقاط في المستوي التي تبعد عن نقطة واحدة ثابتة البعد نفسه.

بعد إرساء الأساسات نبدأ بتشييد البناء فنقيم مجموعةً أولى من الأعمدة تقوم عليها الطبقة الأولى ويقابل ذلك في الهندسة أن نثبت مجموعةً من المبرهنات (النظريات) اعتمادًا على الموضوعات الأساسيّة. ولا بدّ لنا مرّةً أخرى هنا من تقديم بعض التعاريف (أي من تحضير بعض التجهيزات اللازمة للبناء) قبل رفع تلك الأعمدة. ثمّ ننطلق إلى الطبقة التالية بنفس الطريقة أي لمجموعةٍ جديدة من النظريات. وثمّة ملاحظتان لا بدّ أن يكون القارئ قد انتبه لهما لكنّني أذكرهما لمزيدٍ من التوضيح:

١- إنّ النظريّات التي نتحدّث عنها ما هي غير خواص المستقيمات المتوازية والمتقاطعة والزوايا والأشكال الهندسيّة المختلفة وعلاقاتها بين بعضها البعض... وهي ما يدرسه طلاب المدارس الإعداديّة (المتوسطة) في أيامّنا هذه.

٢- إنّ البناء الهندسيّ يزيد ديناميكيةً عن البناء العاديّ (الإسمنتي) فقد يحدث أن نستخدم في برهان نظريةٍ من المجموعة الثانية (أو الثالثة أو الرابعة...) موضوعةً من الموضوعات مباشرةً أي أنّه ليس من

الضروري أن يكون البناء منتظمًا كليّاً وهذا الأمر نفسه نراه في بعض الأبنية الإسمنتية أيضًا، لكنّ الهندسة أكثر ديناميكيةً حتّى من هذا إذ يمكن حتّى استبدال موضوعةٍ بنظريّةٍ وإعادة تركيب البناء من جديد ولعلّ الفرصة عن حديث أعمق حول هذا الموضوع ستتاح لنا فيما بعد عندما نتعرّض لموضوع الهندسات اللاإقليدية. أما الآن فكلّ ما بقي عليّ قوله، بشأن الهندسة هنا، هو أنّه لم يبقَ الكثير بعد إقليدس ليُعمَل إلا بعض التشذيبات والإضافات، ومحاولات لحلّ بعض المسائل التي حُلّ الكثير منها في وقتٍ قصير وبقي بعضه القليل دون حلٍّ طوال ألفي عام تقريبًا والسبب هو أنّ هذه المسائل لم تكن قابلة للحلّ أصلاً كما سيتّضح بعد وقتٍ طويل لكنّنا سنترك الحديث عن ذلك لوقته.



صورةٌ لبناءٍ قيد الإنشاء في دمشق. من الواضح أنّ أعمدةً ترتفع من طابقٍ ما لا تحمل الطابق التالي مباشرةً. إنّ هذه الفكرة تتكرّر كثيرًا في بناء الهندسة الأعقد من هذا بكثير. وفي الحقيقة برهن إقليدس ثمانيةً وعشرين نظريّةً اعتمادًا على أربع موضوعاتٍ فقط ولم يستخدم الموضوعة الخامسة إلا لبرهان النظرية التاسعة والعشرين ويبدو أنّه كان يحاول تجنب استخدامها معتبرًا إيّاها كنظرية. لكنّه اضطّر لذلك آخر الأمر.

نرى التشابه بين الهندسة الإقليدية، وهي نموذج من البنى الرياضية، وبين هيكل تقليدي لبناء اسمنتي. يخطر ببالي سؤالٌ جدير بالاهتمام والمتابعة: هل يمكن الاستفادة من فنّ العمارة لإعادة تشييد بنية رياضية ما، كالهندسة الإقليدية مثلاً بطريقة جديدة؟ على سبيل المثال شيّد بناء شركة.B.M.W العالمية للسيارات انطلاقًا من فكرة إشادة برجٍ دائري ضخم يحمل على محيطه البناء ودونما حاجة إلى أعمدة إضافــية. هل يمكن الاستفادة من مثل هذه الفكرة المعمارية أو أفكارٍ خلاقة أخرى لإعادة تركيب البنى الرياضية بطرق جديدة. إنه لأمر ممتع أن نحاول ذلك على الأقلّ وهو مشروعٌ مطروحٌ على الرياضيين الشبّان الذين قد يحبّون هذا العمل!

الجبر، فخر الحضارة العربية الإسلامية

ليس الفجر هو الوقت المناسب كي ننظر إلى الشرق، إذا أردنا أن نفهمه، ولا أوج الظهيرة هو الوقت، بل هي ساعة الغروب؛
حين ترتفع الشمس، حاملةً في مجدها غنائم آسيا، في سماء أوروبا.

تيار ده شاردان

عندما نفهم ماضينا بموضوعيّة، ونقدّر أنفسنا حقّ قدرنا. دون مغالاةٍ وبتواضع من جهة، ودون شعور بالنقص وبإيمان بالذات من جهة أخرى؛
فإنّ ماضينا يتحوّل من قيدٍ نعيش متكاسلين في إساره، إلى دافعٍ كبيرٍ ومهماز، يحثّنا على استعادة مكاننا، ولعب دورنا في صيرورة التطوّر الإنسانيّ.

لا يعني هذا العنوان أنَّ الجبر كان الميدان الوحيد الذي أسهم بتطويره علماءَ عاشوا وعملوا في ظلِّ الدولة العربيّة الإسلاميّة وكتبوا أعمالهم بلغة الضاد، من عرب وأعاجم، ومن مسلمين وذميّين. كما لا يعني أيضًا أنّهم، في وضع وتطوير هذا الفرع من الرياضيات، كانوا الوحيدين. بيد أنّهم لعبوا بالمقابل الدور الأكبر في تطوير أفكارٍ كانت موجودةً حول حلّ

المعادلات وتصنيفها وصولاً إلى جعله علمًا مستقلاً له أسسه ودوره ومجاله وتطبيقاته وأساليبه. ويكفيهم فخرًا أنّ كلمة جبر المستخدمة في كلّ لغات العالم هي كلمةٌ عربيّة الأصل. ومن المعروف أنّها قد وصلت إلى الغرب عبر الكتاب الشهير "الجبر والمقابلة" للخوارزمي الّذي إضافةً لكلمة جبر العربيّة ترك اسمه أيضًا (وهو في الواقع ليس اسمه بل لقبه نسبةً لمدينته خوارزم التي تقع في إيران حاليّاً) في كلمة "خوارزمية algorithm" التي تعني "الخطوات المنطقية المتتالية المتّبعة للوصول لحلّ مسألة معيّنة".

لكنّنا قبل أن نصلَ إلى الحديث عن الجبر عند العرب لا بدّ لنا أن نلقي نظرةً على ما أنجزه من سبقهم في هذا المضمار. ولقد أذهلني أن أعرفَ، وأنا أبحث في المراجع المختلفة التي تتحدّث عن تاريخ الرياضيات، أنّ البابليين كانوا قد وصلوا منذ عهد حمورابي تقريبًا، أي قبل ما يزيد عن ثلاثةِ آلافٍ ونصف الألف من السنين من وقتنا هذا، إلى حلّ معادلاتٍ من الدرجة الثانية مستخدمين طرقاً عديدة من بينها الطريقة العامّة التي نستخدمها اليوم، أيّ الصيغة: $x=(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/2a$ مع إهمال الجذور السالبة بالطبع، ودون أيّ تبريرٍ أو تفسيرٍ لاستخدامها، أي دون أيّ ذكرٍ لكيفية وصولهم إليها، ودون الانتباه لكونها طريقة عامّة. والأكثر من ذلك هو أنّهم استطاعوا تحليل معادلاتٍ من درجةٍ أكبر من الدرجة الثانية بحيث يستطيعون حلّها اعتمادًا على حلّ معادلاتٍ من الدرجة الأولى والثانية. نستطيع أن نضيفَ إلى ذلك سَبَقًا آخر للرياضيين البابليّين فهم عبر اهتمامهم الفلكيّ وتسجيلهم بشكلٍ دَوريّ لبعض الأرصاد، بدأوا يكوّنون فكرةً عن مفهوم التابع ونرى ذلك جيّدًا بملاحظتنا لرقيمٍ يحتوي على

تسجيلٍ للأعداد من 26 إلى 48 مع ما يقابلها للكميّات من الشكل $n^2 + n^3$ وهناك لوحٌ آخر يتألّف من عمودين يتضمّن الأوّل قيَمًا لـ "متحوّل" ويتضمّن الآخر قيم ما يقابله من التابع الأسّيّ الموافق. وأخيرًا فإنّ أحد الألواح يطرح السؤال التالي ويجيب عليه: ما هو الأسّ الذي يجب أن نرفعَ له عددًا معيّنًا للحصول على عددٍ معلومٍ آخر؟ وهذا يعني في لغة اليوم ما هو لوغاريتم عددٍ معيّن بالنسبة لأساسٍ معلوم؟

نجد في برديّة رند المصريّة الشهيرة بعض المسائل ذات الطابع الجبريّ أيضًا وعلى نحوٍ خاص المسألة التالية: ليكن لدينا مقدار. وليكن مجموعه مع سبعُهُ يساوي 19. فما هو هذا المقدار؟ نعرف اليوم أنّ هذا السؤال البسيط يُحلُّ بإيجاد جذر المعادلة من الدرجة الأولى:

$x + x/7 = 19$ ، الأمر الذي فعله المصريّون كتّاب هذه الوثيقة (دون كتابة المعادلة كما نكتبها اليوم) وحصلوا على الجواب الصحيح: $x = 16 + 5/8$

شهد الجبر تطوّرًا هامّاً عند الإغريق وإن يكن أقلّ بكثير من التطوّر الّذي شهدته الهندسة. فلقد بقيت ميزة الإغريق على الدوام هي شرح وتفسير الأسباب، أي الاهتمام بطرق حلّ المعادلات والاهتمام بالعلاقات بين الأعداد بحدّ ذاتها بغضّ النظر عن المسائل التي تمثّلها هذه العلاقات. كان اليونانيّون أوّل من اهتمّ بالأعداد الأوّليّة (وهي مسألة تقع في الفرع من الرياضيات الّذي نسمّيه نظريّة الأعداد وليس في الجبر. بيد أنّ الفرق بين الاثنين لم يكن موجودًا في ذلك الحين) على سبيل المثال. وقد برهن إقليدس على عدم وجود عدد أوّليّ أعظميّ أي على كون مجموعة الأعداد الأوّليّة غير منتهية. ولعلّ

أهمّ القضايا الجديدة التي طرحها عالم الجبر اليوناني ديوفانتوس (في وقتٍ لم تكن كلمة جبر مستخدمة بعد) هي ما نسمّيه اليوم التوابع الديوفانتية. وهي معادلات لها أكثر من حلّ واحد لسبب بسيط هو أن المتغيّر فيها يرتبط بمتغيّرٍ آخر. فإذا طرحنا السؤال التالي على سبيل المثال: إذا كان راتب مظلوم الفقير هو عشرة آلاف ليرة. وكان مظلوم هذا موظّفاً نبيهًا استطاع لشهورٍ طويلة أن يتكيّف مع راتبه فلا يوفّر منه شيئًا لكنّه بالمقابل لا يحتاج أن يستدين أبدًا فوق راتبه. وصدر، لحسن الحظّ، قانونٌ بزيادة الرواتب بحيث ازداد راتب السيّد فقير بالمقدار x فأصبح $10000 + x$. لكنّ مصروف هذا الموظّف المسكين ازداد بالمقدار y بسبب غلاء الأسعار الذي يرافق عادةً كلَّ زيادة رواتب جديدة. وأسوأ ما في الأمر هو أنّ ازدياد المصروف (الناتج فقط عن غلاء الأسعار وليس عن شراء سلعٍ لم يكن يشتريها من قبل) كان يزيد مائة ليرة عن ضعفي الزيادة في الراتب أي أنّ:

$y = 2x + 100$. فالسؤال المطروح الآن هو التالي: ما هي أفضل زيادة في الراتب بالنسبة لهذا الموظّف؟

لو كانت الزيادة تعادل 500 ليرة لكان مصروفه سيزيد 1100 ليرة بزيادة فعليّة في المصروف مقدارها 600 ليرة. (الفرق بين زيادة المصروف وزيادة الراتب).

ولو كانت الزيادة 750 ليرة لكان مصروفه سيزيد 1600 ليرة بزيادة فعليّة في المصروف مقدارها 850 ليرة.

أما لو كانت الزيادة 1000 ليرة لكان مصروفه سيزيد 2100 ليرة بزيادة فعليّة في المصروف مقدارها 1100 ليرة.

فأفضل الحلول بالنسبة لهذا الموظّف هو أن تكون الزيادة صفرًا أي ألا يكون هناك أيّ زيادة في الرواتب فحينئذٍ سيزيد مصروفه الفعليّ مائة ليرة فقط. وهي زيادة طبيعية لا بدّ منها حتّى لو لم يكن هناك زيادة في الرواتب.

إنّ فكرة المعادلات الديوفانتية تفيد، في نظرية الأعداد، في تصنيف الأعداد التي ترتبط وفق معادلةٍ ديوفانتية معيّنة ضمنَ مجموعاتٍ خاصّة. فمجموعة الأعداد 1، 2، 3، 4، 5، الخ.. تقابلها وفق المعادلة السابقة الأعداد: 102، 104، 106، 108، 110، الخ.. وتطبّق مثل هذه التوابع في مجال دراسة الأعداد الزوجية أو الفردية أو الأوليّة...

الجدير بالذكر هو أنّ الكثير من المعلومات التاريخيّة عمّا توصّل إليه الإغريق لم يصلنا إلا في كتبٍ عربيّة. فالعرب الذين ترجموا كلّ ما وصلهم من علوم سابقيهم، ولا سيّما اليونان بشكلٍ خاصّ قدّموا خدمةً كبيرةً للعالم بحفظهم لوثائق هامّة فُقِدَت فيما بعد مخطوطاتها الأصليّة (الأمر الذي سيتكرّر بالاحتفاظ بترجماتٍ لاتينيّة لكتبٍ عربيّة فُقِدت نسخها العربيّة). ومع ذلك فهذا ليس هو الفضل الأكبر للعرب وغيرهم ممّن عملوا في ظلّ الدولة (أو الدول) العربيّة الإسلاميّة.

فلقد صهرت الحضارة الكبيرة التي قامت في نهاية القرن الثامن الميلاديّ على امتدادٍ جغرافي يشمل مساحةً جغرافية تقرب من ربع العالم القديم المعروف، كلّ المعارف المختلفة اليونانيّة والهنديّة والفارسيّة والبابليّة القديمة... وهي معارف كانت تبدو مختلفةً ولا علاقة لإحداها بالأخرى. وقد أغنت الحضارة العربيّة هذه المعارف وقدّم علماء العرب والإسلام انطلاقًا مما ورثوه الكثير من الجديد الذي لا يخلو أبدًا من الأصالة والإبداع.

ميلاد الجبر

لا أعتقد أنّه من قبيل المبالغة القول إنّ أثر كتاب "الجبر والمقابلة" للخوارزمي، لا يقلّ في تاريخ الرياضيات عن أثر كتاب "المبادئ" لإقليدس. صحيحٌ أنّ الكتاب لا يضمُّ بناءً رياضيًا مبنيّاً على الأساس الموضوعاتيّ كما هو الحال في كتاب إقليدس، وهو أمرٌ لا يقلّل من قيمته لسببٍ بسيط وهو أنّ أوان ظهور الجبر كبناءٍ يشبه بناء الهندسة الإقليدية لم يكن قد حان بعد؛ بل إنّه سيتأخّر حتّى عصر النهضة الكبرى في الرياضيات أي القرن التاسع عشر، بيد أنّ كتاب الجبر والمقابلة كان يوازي كتاب المبادئ من حيث كونه قفزةً كبيرةً إلى الأمام، وانتقالاً من مرحلةٍ إلى أخرى.

تحدّثنا في حينه عن كتاب الخوارزمي حول الأعداد والنظام العشريّ. لكنّه كان قد وضع كتابًا آخر قبل ذلك وقد وصلنا لحسن الحظّ أكثر من مخطوطةٍ عربيةٍ له. اختار الخوارزمي لكتابه هذا عنوان: "الجبر والمقابلة" وهو يبحث في هذا الكتاب، الذي وُضِعَ بين عامي 813 و830 على ما يُرجَّح[1]، في ذلك الفرع من الرياضيات الذي يرمي إلى حلّ المعادلات وهي علاقات بين أشياء متساوية تحوي حدودًا مجهولة. وهذا الفرع من الرياضيات، كثيرًا ما نستخدم أبسط أشكاله، ودون أن ندري أحيانًا، فحين يستيقظ متأخّرًا طالبٌ لا يحبُّ الرياضيات كثيرًا فلا

١- لأنّ هذا التاريخ هو فترة حكم الخليفة المأمون الّذي أسّس بيت الحكمة في بغداد، حيث عمل الخوارزمي، ولأنّ الخوارزمي يصدِّر كتابه بتعظيم المأمون والثناء عليه. وهي عادةٌ سيِّئة في التزلّف للمقتدرين لمّا يتخلّى عنها الكثيرون حتّى اليوم.

يتمكّن من تناول فطوره في البيت، فيشتري في طريقه إلى مدرسته فطيرتين من الزعتر واثنتين من الجبن ويدفع ثمنًا لهما ثلاثين ليرة، ذلك أنّ ثمن فطيرة الجبن، على ما يخبره البائع، يساوي ضعفي ثمن فطيرة الزعتر. فإنّه يستخدم الرياضيات بنجاح وعلى نحوٍ عفويّ، لكي يعرف ثمن كلٍّ منهما على حدة وذلك كما يلي: إذا كان x هو ثمن فطيرة الزعتر فإن $2x$ هو ثمن فطيرة الجبن وعليه بالتالي أن يدفع $2x$ (ثمن فطيرتي زعتر) و$4x$ (ثمن فطيرتي جبن) أي $6x = 30$ وبالتالي $x = 5$ أي أنّ ثمن فطيرة الزعتر هو خمس ليرات بينما ثمن فطيرة الجبن هو ضعفيها أي عشر ليرات.

أمّا المعادلات الأكثر تعقيدًا فهي التي تدخل فيها قوى المتحولات. فمعادلات الدرجة الثانية (أي التي تحوي x^2) هي معادلات تصادفنا في مسائل تتعلّق بحساب المساحات مثلاً. والمعادلات التي تحوي قوى أكبر هي مسائل تنتج عن مواضيع علمية أكثر تعقيدًا.

أوضح الخوارزمي في كتابه هذا طرقًا لحلّ المعادلات ذات الأشكال:

$$bx + c = ax^2 \text{ ، } ax^2 + c = bx \text{ ، } ax^2 + bx = c \text{ ، } bx = c \text{ ، } ax^2 = c \text{ ، } ax^2 = bx$$

فـ "الجبر" عند الخوارزمي هو بالأساس جعل جميع حدود المعادلة موجبة وذلك بنقل الحدود السالبة من طرفٍ إلى طرف. أما المقابَلة فهي حذف الحدود المتساوية في طرفي المعادلة كما ذكرنا آنفًا وينتج عن العمليّتين بالنتيجة إرجاع المعادلة إلى واحدٍ من هذه الأشكال القانونية السابقة. وقد استطاع الخوارزمي حلّ هذه المعادلات بواسطة ما يسمّى

طريقة الجذور. فهو أوجد طرقًا عامّة لحلّ كلّ واحدةٍ من هذه المعادلات مقدّمًا براهينَ هندسية على صلاحية طرقه. من الأمور الشديدة الأهمية التي كان الخوارزمي أوّل من أشار إليها أيضًا هي شروط وجود الجذور للمعادلة. وهو الأمر الذي يعاني مدرّسو الرياضيات كثيرًا اليوم في إفهامه للتلاميذ! يبقى أن نشير إلى أنّ هذه الجذور (أو الحلول) كانت موجبة على الدوام ولم يكن ممكنًا بعد التفكير في معنى الحلول السالبة.

تابع تطوير الجبر بعد الخوارزمي علماء آخرون عديدون ومن بين العلماء المسلمين الذين قدّموا خدماتٍ مميّزةٍ للرياضيات أيضًا، لا بدّ من ذكر عمر الخيّام (1048-1131) الّذي يعرفه الناس من خلال رباعياته الشهيرة التي غنّت بعضها المطربة المعروفة أمّ كلثوم. كان عمر الخيّام شاعرًا إذًا، إلى جانب كونه رياضيّاً كبيرًا. وهو على سبيل المثال أحد أوّل من درسوا المتتاليات العددية المختلفة وخصوصًا المتتالية الشهيرة التي تُعرَفُ في الغرب بمتتالية فيبوناتشي[1] L. Fibonacci. وكونه شاعرًا فقد كان الخيّام ممّن أدركوا ولمسوا بعمق الناحية الجمالية والفنيّة في الرياضيات حتّى أنّه يعرّف الجبر على أنّه *"الفنّ الّذي يربط مقدارًا مجهولاً في علاقةٍ تضمّ مقادير معلومة..."* وقد أدرك الخيّام وجود علاقةٍ بين وجود الجذور التربيعية في حلّ المعادلات من الدرجة الثانية وبين البناء الهندسي لهذه المعادلة (فالمعادلة الخطيّة أي التي من الدرجة الأولى لا يقابلها بناء هندسي

١- متتالية هامّة جداً وتتميّز بصفاتٍ جماليّة غريبة لذلك أفردنا لها ملحقًا في نهاية هذا الفصل أيضًا.

كما أنّ الجذور لا تدخل في حلّها) وقد طرح من ثمّ نظرية المعادلات من الدرجة الثالثة وخمّن بأنّ هذه المعادلات لا يمكن حلّها بالاستفادة من خواص الدائرة، الأمر الّذي قال به ديكارت R. Descartes، أيضًا بعده بستّمائة عام والذي أُثبت بعد ديكارت بمائتي سنةٍ أخرى.

تطوّر الحساب الجبريّ تطوّرًا كبيرًا أيضًا على يد الكرجي وتلميذه السموأل الّذي عرّف العمليات على القوى المختلفة للمجهول وصولاً إلى جمع وضرب وقسمة كثير حدود على آخر. كما توصّل الكرجي إلى قانون ثنائي الحدّ: $(a + b)^n = \sum_{k=1}^{k=n} (n,k) a^k b^{n-k}$ الذي كان يُنسَب إلى نيوتن قبل أن يحقّقَ الأستاذ رشدي راشد والأستاذ صلاح الأحمد، منذ ثلاثين عامًا فقط مخطوطة "الباهر في الجبر" للسموأل وهو تلميذ الكرجي الذي يذكر هذه الصيغة في كتابه ناسبًا إياها لأستاذه. ومن أجل برهان هذه الصيغة أنشأ الكرجي المثلّث الحسابي الذي كان يُنسَبُ إلى باسكال واستخدم بشكلٍ محدود مبدأ الاستقراء الرياضي.

يبقى أن نشير إلى تباشير فرعٍ آخر من الرياضيات بدأه العرب وسيكمله ديكارت باسم الهندسة التحليلية. بل إننا لا نغالي إذا قلنا إنّ شرف الدين الطوسي قد أدرك بعض مفاهيم التحليل الرياضي التي لم تُذكَر من بعده حتّى مجيء نيوتن ولايبنتز. فقد أعاد العرب حلَّ المسألة التي كان قد طرحها اليونانيون وسبق أنْ قدّم أرخميدس حلاً لها: كيف نقطع كرة بمستوٍ بحيث تكون نسبة حجمي جزئي الكرة الناتجين مساويةً لنسبةٍ مفروضة؟

برهن الماهاني أنّ هذه المسألة تكافئ حلّ معادلةٍ من الشكل: $x^3 + 2 = px^2$ وقد حلّ ابن الهيثم هذه المعادلة بطريقةٍ هندسية. لكنّ هناك ما يثير دهشةً أكبر وما سأقوله الآن قد يبدو غير مفهومٍ جداً لغير المختّصين، وأنا أعتذر عن ذلك، لكنّ بإمكان كلّ طالب بكالوريا في الفرع العلمي أن يفهمه تمامًا وأن يُدهَشَ له جداً:

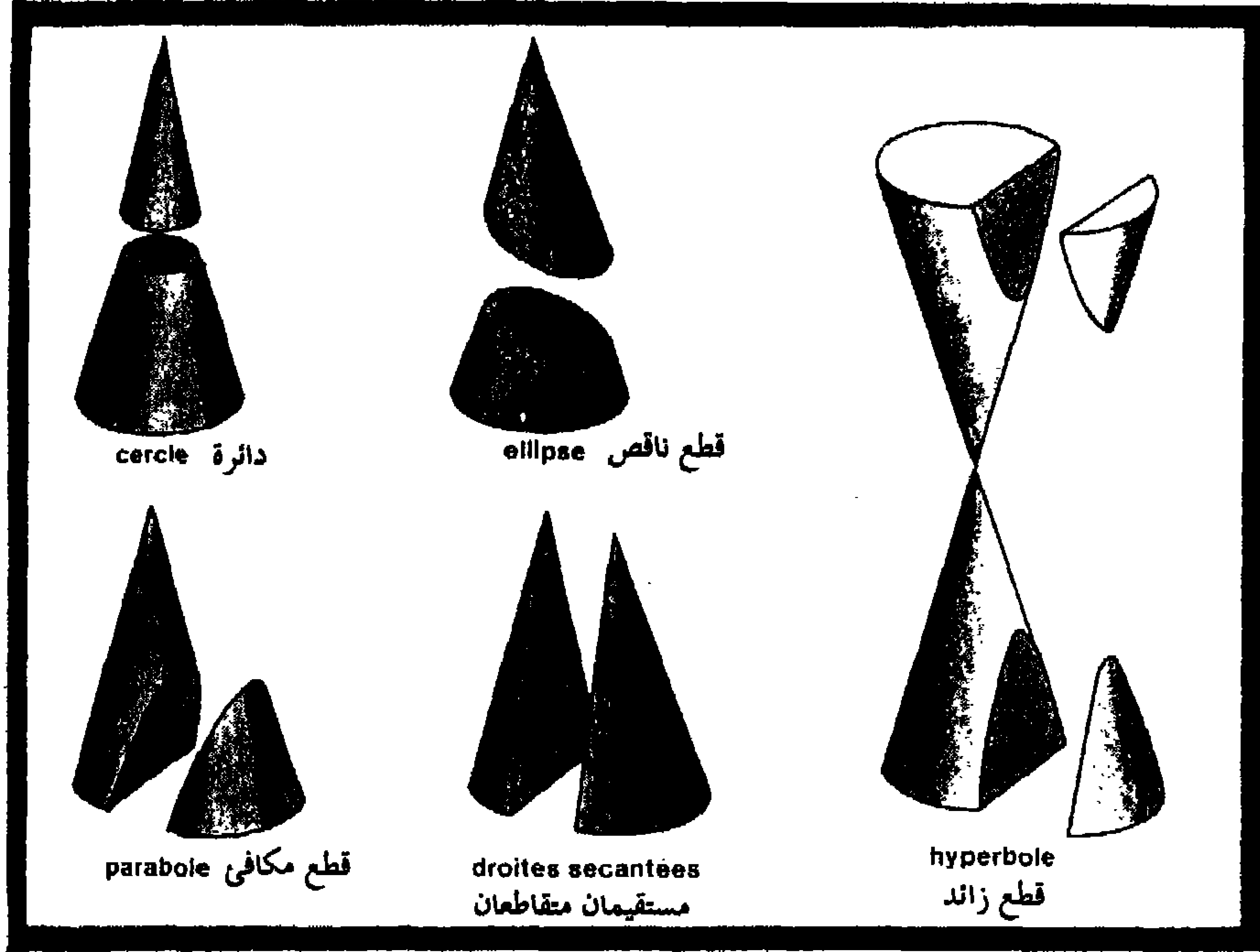
كان عمر الخيّام أوّل من حاول وضع نظريّة عامّة لحلّ معادلات الدرجة الثالثة، وذلك باستخدام الهندسة. أدرك الخيّام بوضوح أنّ المعادلات التكعيبية ليست بنفس بساطة المعادلات التربيعية التي يمكن ببساطةٍ إرجاعها إلى مسائل تتعلّق بأشكال هندسية بسيطة: المربع والمستطيل والدائرة، بشكلٍ أساسيّ. أمّا معادلات الدرجة الثالثة فلا بدّ لحلّها هندسياً من استخدام القطوع المخروطيّة. (أي الدائرة والقطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد، الخ...)

توصّل صاحب الرباعيّات الشهيرة إلى نتيجتين كبيرتين، أوّلاً: حلّ عام لكلّ معادلات الدرجة الثالثة بواسطة قطعين مخروطيين. ثانيًا: إدخال استخدام واحدة قياس ثابتة لجعل الحسابات الهندسية ممكنة وصحيحة. وهي خطوة كبيرة على طريق الهندسة التحليلية.

يُرجّح أنّ شرف الدين الطوسي قد استفاد من أعمال الخيّام بيد أنّ ذلك ليس أمرًا مثبتًا. في كلّ الأحوال قطع الطوسيّ شوطًا بعيدًا آخر:

في سبيل تطبيقها في حلّ معادلات الدرجة الثالثة، يجد الطوسي، في رسالةٍ كتبها نحو العام الميلاديّ 1170، معادلة القطع المكافئ ومعادلة القطع الزائد المتساوي الساقين بالنسبة لنظامين مختلفين من المحاور.

تميّز شرف الدين الطوسيّ عن أبي الفتح (وهي كنية الخيام) باهتمامه بقضيّة وجود الحلول للمعادلة (وهي الحلول الموجبة دومًا) وقد قاده ذلك إلى التعرّض لمفهوم تقاطع منحني مع مستقيم وإلى مفهوم النهاية



يعطي تقاطع المجسّم المخروطي مع مستوٍ ما أحد الأشكال التي تسمّى القطوع المخروطية:

- إذا كان المستوي مارًّا برأس المخروط وعموديًا على محوره فإن التقاطع هو نقطة وحيدة هي رأس المخروط.
- إذا كان المستوي يحوي محور المخروط فإنّ الشكل الناتج هو مستقيمين متقاطعين.
- إذا كان المستوي عموديًا على محور المخروط ولا يمرّ من الراس فالشكل الناتج هو دائرة.
- إذا كان المستوي موازيًا للمحور ولا يحتويه فالشكل الناتج هو قطع زائد له فرعان.
- إذا كان المستوي مائلاً على المحور وموازيًا لحرف (مولّد) المخروط فإنّ الشكل الناتج هو قطع مكافئ.
- إذا كان المستوي مائلاً بالنسبة للمحور وغير موازٍ للحرف فإنّ الشكل الناتج هو قطع ناقص.

العظمى (التي كان يسميها العدد الأعظم) وصولاً إلى مفهوم المشتق. وهي مفاهيم من التحليل الرياضي الذي سيحين زمن نضجه مع نيوتن I. Newton ولايبنتز بعد أكثر من نصف ألفٍ من السنين!

من أجل حلّ المعادلة التي من الشكل: $x^3 + c = ax^2$ والتي يمكن أن تُكتب بالشكل: $ax^2 - x^3 = c$ درس الطوسي التابع $f(x) = ax^2 - x^3$ فلاحظ أنّ المشتقّ ينعدم عندما $x = 0$ أو $x = 2a/3$ فهناك نهاية صغرى هي $f(0) = 0$ ونهاية عظمى هي: $f(2a/3) = -4a^3/27 = d$ ولهذه المعادلة جذر مضاعف هو $x_1 = 0$ وجذر موجب هو $x_2 = a$ يستنتج الطوسي إذًا (وهو الأمر الكبير الأهمية) أنه إذا كان $c \langle d$ فسيكون للمعادلة جذران موجبان: x_1, x_2 يحقّقان ما يلي: $0 \langle x_1 \langle 2a/3 \langle x_2 \langle a$ وتعتبر هذه الطريقة في تحديد جذور المعادلة من الطرق المتّبعة في التحليل العددي والتي ما يزال علماء الرياضيات يستخدمونها في حلّ معادلاتٍ أكثر صعوبة وبشكلٍ خاصّ المعادلات التفاضلية غير القابلة لحلٍّ عام، حتّى اليوم.

أكثر من ذلك، ميّز الطوسي الحالات التالية للمعادلة السابقة:

$c \langle d$ فإنّ للمعادلة حلان كما أشرنا أعلاه

$c = d$ فإنّ للمعادلة حلّ وحيد.

$c \rangle d$ فإنّ المعادلة مستحيلة (من الواضح أنّ الطوسي يأخذ بعين الاعتبار الجذور الموجبة فقط).

قد يقول قائل: لماذا استخدام حروف الأبجدية اللاتينية، حتّى ونحن نتحدّث عن مكتشفات علماء عرب؟ واقع الأمر أنّنا نفعل ذلك للتبسيط ولاختصار الوقت والمساحة علاوةً على الجهد. لم يكتب الخيام ولا الطوسي معادلاتهما وشروحهما باستخدام الرموز. لا اللاتينية ولا العربية. كان يُعبّر عن كل المعادلات وعن كلّ الرياضيات باللغة العادية. وقد كان هذا هو أهمّ الأسباب التي جعلت العرب يتوقّفون عند هذا الحدّ كما يرى الدكتور رشدي راشد. أمّا الحروف اللاتينية فهي في الرياضيات، لم تعد حروفاً لاتينية: لقد صارت جزءًا من أبجدية الرياضيات العالمية!

كان تحقيق المخطوطات العربية، والعلمية منها بشكلٍ خاصّ، وقفًا على بعض المستشرقين المختصّين لفترةٍ طويلة بسبب غياب العلماء العرب طوال فترة الحكم العثمانيّ وما تلاه من عهود الاستعمار الغربيّ وما من شكٍّ بأنّ العديد منهم كانوا موضوعيّين لدرجةٍ كبيرة، لكنّ الغريب مع ذلك هو امتدادُ أيدٍ خفيةٍ تجعل الأسود أبيضَ والأبيض أسود ببساطةٍ غريبة! فموسوعة "التاريخ العامّ للعلوم Histoire générale des sciences" تتحدّث باختصارٍ مجحف عن الرياضيات (وعن العلوم الأخرى) عند العرب في حين تتحدّث عن شيءٍ لم يوجد في التاريخ على الإطلاق وهو الرياضيات في الحضارة العبرانية، معتمدةً على مرجعٍ وحيد هو كتابٌ دينيٌّ بحت أي التوراة! وقد بدأ الوضع يستقيم أكثر في العقود الأخيرة مع وجود مختّصين عرب يهتمّون بالموضوع. ومن الّذين ندين لهم بشكلٍ خاصّ في معرفة الكثير عن تفاصيل تطوّر الرياضيات عند

العرب، الأستاذ رشدي راشد الذي يعيش في فرنسا وهو مدير مركز تاريخ العلوم والفلسفات العربية والعصر الوسيط في المركز القومي للبحث العلمي في فرنسا CNRS وأستاذ في جامعة طوكيو، وقد أشرف منذ سنواتٍ قليلة على إصدار موسوعةٍ هامّة بالفرنسيّة عن تاريخ العلوم عند العرب، تُرجِمت فيما بعد إلى العربية. ويمكن للمهتمّين في هذا المجال الرجوع إلى بعض المراجع المذكورة في نهاية الكتاب ولا سيّما إلى هذه الموسوعة بالذات.

لماذا توقّف العرب؟

يقول الأستاذ راشد معلّقًا على أعمال شرف الدين الطوسيّ:

"..هكذا نرى أنّ نظريّة المعادلات لم تعد تقتصر على فصلٍ من فصول الجبر لكنّها تتضمن مجالاً أوسع من ذلك بكثير. فهذا الرياضي يجمع ضمن هذه النظرية بين الدراسة الهندسية للمعادلات وحلّها العددي. إنّه يطرح ويحلّ من ثمّ مسألةَ وجود الحلّ لكلّ نوعٍ من المعادلات. مما يقوده إلى ابتكار الدراسة الموضعية للمنحنيات التي يستخدمها، وخاصّة إلى دراسة منهجية للنهاية العظمى لحدوديات من الدرجة الثالثة عن طريق معادلة المشتق. (...) يدلّ هذا على مستوىً رياضيٍّ متقدّمٍ جدّاً بالنسبة لعصرهِ وجديرٌ بالذكر هنا أنّ هذا المستوى بدأ يصل أقصى ما يمكن أن يصل إليه بحث رياضي لا يتمتّع بنظامٍ رمزيٍّ فعّال. فلقد قام الطوسي بكلّ أبحاثه مستعينًا وحسب باللغة الطبيعية (...) إنّ هذه الصعوبة تنتصب لا لتشكّل عائقًا داخليّاً يؤخّر تقدّم أبحاثه فحسب، إنّما أيضًا لتشكّل

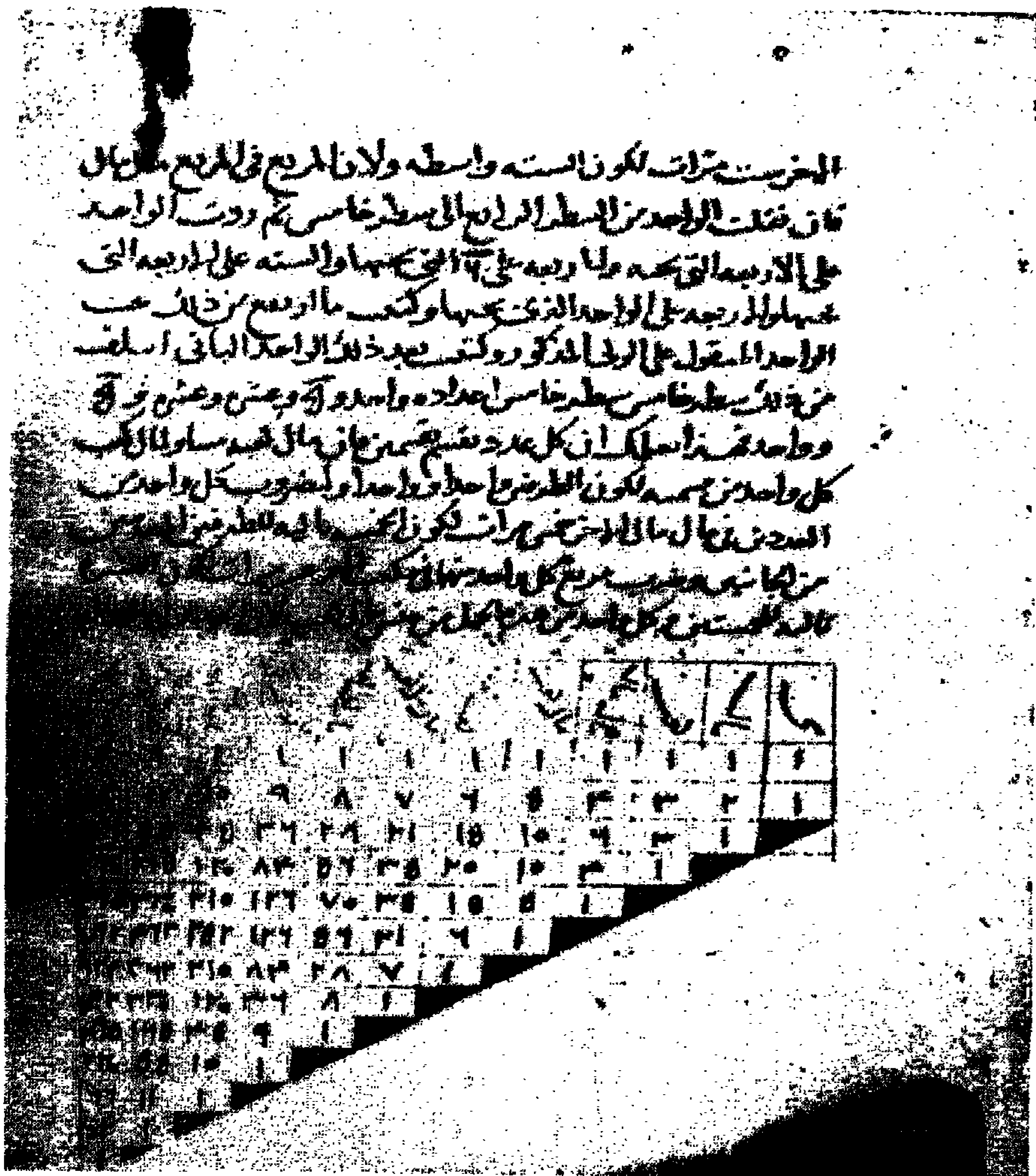
عائقًا أمام نقل وانتشار نتائجه. وهذا يعني أن الرياضي، بمجرّد أن يبدأ معالجة المفاهيم التحليليّة كالّتي ذكرنا، كان يعترضه قصور اللغة الطبيعية في التعبير عن المفاهيم وعن العمليات المطبّقة عليها. ومن المعقول جدًّا أن خلفاء الطوسي قد اصطدموا بهذا العائق إلى أن تعرّض الترميز لتحوّلاته الكبرى وعلى وجه الخصوص مع ديكارت".

ثمّة ملاحظتان يمكن تسجيلهما هنا: يمكننا أولاً أن نضيف على هذا السبب الأساسيّ الّذي أبداه الدكتور راشد سببًا آخر أعتقد أنّ له أهميّة كبيرة أيضًا. وهو استبعاد الطوسي والخيام وغيرهما للأعداد السالبة. أظنّ أنّ الطوسي كان سيستطيع لو أخذ الحلول السالبة بعين الاعتبار أن يرى على نحوٍ أفضل الطبيعة الهندسية للمسألة وأن يلحظ تناظر المنحني بالنسبة لنقطة الانعطاف. وأن يذهب بالتالي إلى ما هو أبعد في هذا الموضوع. ونتساءل ثانيًا: مع كلّ هذه الأسباب الوجيهة جدّاً لماذا كان الأوروبيون أقدر على وضع يدهم على مفاتيح التجديد؟ لماذا كان فيبوناتشي وليس الخيّام هو أوّل من قبِل بمفهوم الأعداد السالبة مفسِّرًا إيّاها بخسارةٍ ماليّة؟ ولماذا كان ديكارت وليس الطوسيّ هو أوّل من استطاع أن يضع نظامًا رمزيّاً كان لا بدّ منه من أجل كلّ تقدّمٍ مقبل؟

لا شكّ أنّ هناك أسبابًا عديدة لا تتعلّق كلّها بالعلم أو بالرياضيات تحديدًا. لكنّني أعتقد أن ثمّة سبباً جوهريّاً هو نفسه الذي جعل الإغريق يرَون بابًا جديدًا ما كان يمكن للبابليين والمصريين أن يرَوه في الهندسة. وهو الذي جعل العرب يطرقون أساليب لم تخطر ببال اليونانيّين، وهو الّذي

سيجعل الثورة العلمية المقبلة، على ما أظن، قادمةً من حيث لا يمكن لأحدٍ أن يتوقّع قدومها! إنها قصّة إبريق الفخّار التي سبق ذكرها. وبعبارةٍ أخرى فهي ضرورة أن تتوفّر النظرة الخارجيّة.

ثمّة أمرٌ آخر أحبُّ أن أشير إليه، إذ يجب ألا يخطر في بالنا مطلقًا أن مسير العلم كان يتوقف هنا ليبدأ هناك. فتطوّر الحساب لم يتوقّف في بابل حين كان يمضي شوطًا في الجزائر اليونانيّة. كما لم ينتظر طلائع المتنورين في أوروبا أن يتوقّف آخر العلماء العرب المسلمين عن الاشتغال بالعلم ليبدؤوا هم مشوارهم. فلقد بقي تطوّر الرياضيات في العالم الإسلامي مستمراً حتى القرن السادس عشر عند نفرٍ قليلٍ موزّعٍ هنا وهناك من العالم الإسلاميّ المنقسم إلى دويلات. في حين بدأ التطوّر الرياضيّ الأوروبيّ بشكلٍ واضح مع ليوناردو فيبوناتشي الذي عاش في القرن الثالث عشر وترجم بعض أعمال العلماء العرب ولا سيّما الخيّام وانطلق منها في أبحاثه الخاصّة. نرى هنا الأثر السلبي الكبير للعزلة والانغلاق. فلقد كفّ العرب عن متابعة ما يجري من تطوّرٍ وحاول عددٌ قليل مشتّتٌ في أصقاع مترامية أن يتابع لوحده لكنّه كان قاصرًا، لا عن معرفة ما يجري خارج مدينته فحسب بل وكذلك عن تقديم مساهمته للآخرين، إن وُجِدَت، وهكذا أصاب الجمود تقدّم العلوم العربية في حين ساعدت إمكانية التواصل واختراع الطباعة النهضة الوليدة في أوروبا.



نرى في هذا الشكل صورةً مأخوذةً من كتاب "الباهر في الجبر" للسموأل المغربي، تلميذ الكرجي الذي يورد المثلّث العددي الذي اشتهر فيما بعد بمثلّث باسكال ويتحدّث عن عمل أستاذه في ما نسميه اليوم نشر ثنائي الحدّ (والذي كان يُنسَبُ إلى نيوتن). نستطيع إذا قرأنا الكتابة العربية ولاحظنا أنه بالإمكان اختصار ما هو مكتوبٌ في هذه الصفحة بالعبارة الرياضية البسيطة التالية: $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$، أن ندرك أهميّة الترميز الرياضي الذي جاء به ديكارت فيما بعد والذي ساعد كثيرًا في إعادة انطلاقة الرياضيات.

الملحق الثاني

رياضيات الجمال

المتتالية العددية في الجبر هي، وكما يدلّ اسمها، مجموعة من الأعداد التي تُكتبُ على نحوٍ متتالٍ بحيث ترتبط وفق نظامٍ معيّن. فمجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية:

2, 4, 6, 8, 10, 12, …

تشكّل مثالاً بسيطًا عن المتتاليات.

تُعرَّفُ متتالية عمر الخيام بالقواعد الثلاث التالية:

١. الحدّ الأوّل من المتتالية هو الواحد.

٢. الحدّ الثاني من المتتالية هو الواحد.

٣. كلّ حدّ من المتتالية، بدءًا من الحدّ الثالث، هو مجموع الحدّين السابقين له.

فمتتالية الخيام إذًا هي:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

يمكن بعملية حسابية بسيطة التأكّد من أنّ:

$13/8 = 1.625$

$21/13 \approx 1.615$

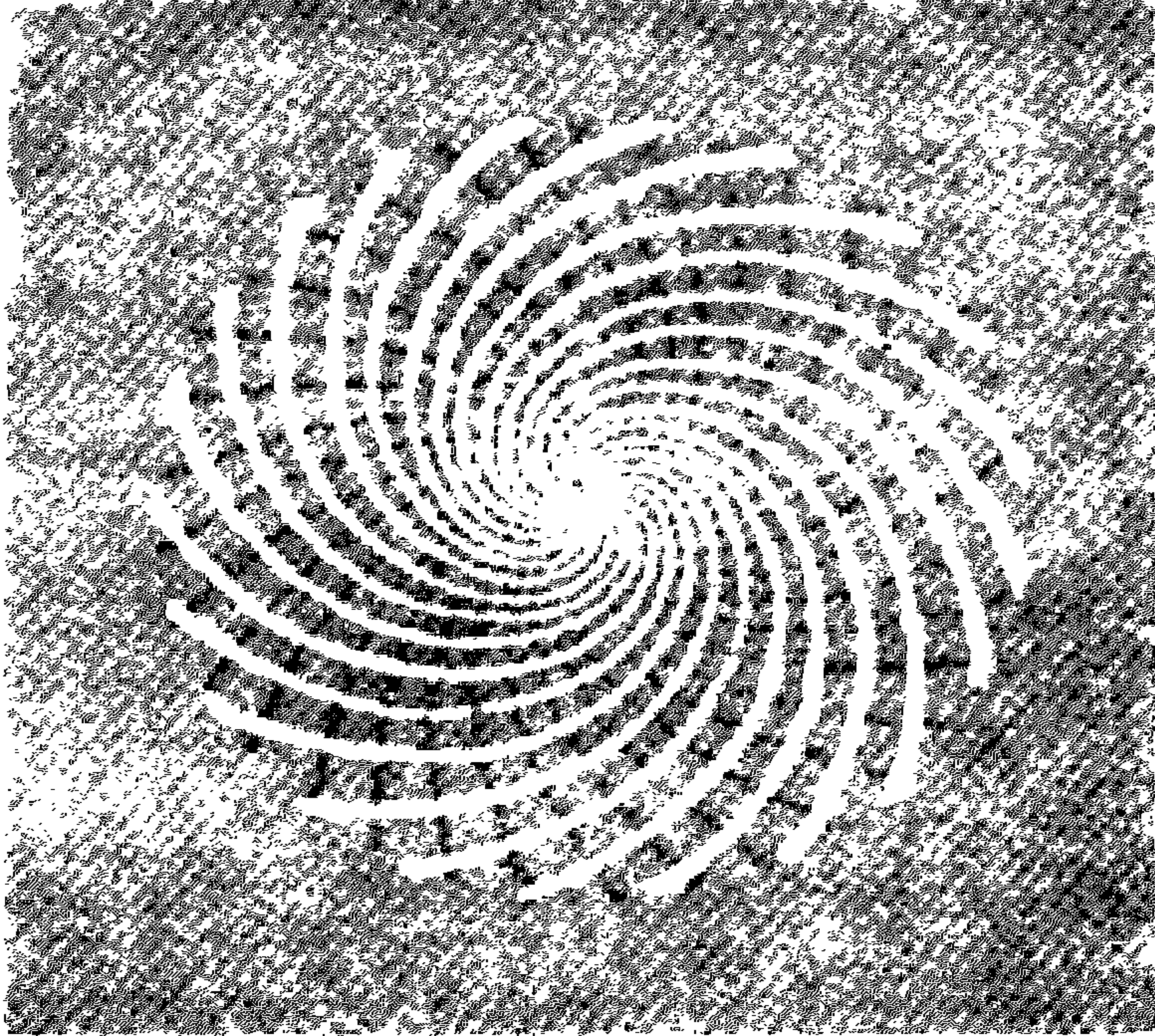
$34/21 \approx 1.619$

$55/34 \approx 1.618$

$89/55 \approx 1.618$ الخ..

يستطيع القارئ أن يكتب مقدار ما يشاء من حدود المتتالية وأن يتأكّد مستخدمًا الآلة الحاسبة من أنّ نسبة أيّ حدّين متتاليين تساوي على الدوام 1.618 تقريبًا. وهذه النسبة تملك على ما يبدو بعض الخواص المحيّرة حتى أنّها سمّيت النسبة الذهبية.

إذا كان الوقت ربيعًا، عزيزي القارئ، وكان لك الحظ في أن تعيش أو أن تقضي استراحةً في ريفٍ بعيدٍ عن ضجّة المدينة فقد يحلو لك أن تقوم بنزهةٍ صغيرةٍ في الحقول وربّما رأيت في إحدى المزارع على طريقك بعض زهرات عبّاد الشمس المعروفة. يمكنك عندئذٍ، إذا كنت تملك ما يكفي من الصبر أن تقطف زهرةً منها وأن تتأمّل عن قرب الزهيرات الصفراء الصغيرة جدّاً التي ستشكّل فيما بعد بذور عبّاد الشمس. ولعلّك ستلاحظ أنّ هذه الزهيرات الصغيرة تتوضّع على نحوٍ منتظم ضمن صفوفٍ تلتفُّ بشكلٍ حلزوني، بحيث تشكّل مجموعتين من الصفوف تتجهان باتجاهين متعاكسين. وستعاني قليلاً بسبب صغر هذه الزهيرات كي تتأكّد أن عدد الصفوف في الاتجاه المعاكس لاتجاه دوران عقارب الساعة هو 34 أما عددها في الاتجاه الموافق لاتجاه دوران عقارب الساعة فهو 21. لاحظ أنّهما عددان متتاليان من أعداد عمر الخيام.



شكل تخطيطي لزهرة عبّاد الشمس يبيّن الحلزونات

التي تشكّلها الزهيرات الصغيرة في الاتجاهين



زهرة عبّاد الشمس. يمكن عدّ الخطوط الحلزونية بالاتجاهين

لنرى أنهما العددان المتتاليان: 21 و 34 من متتالية الخيام.

ولا بأس عليك إن لم يكن الوقت ربيعًا ولم تستطع أن تجري التجربة مع زهرة عبّاد الشمس تستطيع أن تبحث عن هذه الصفوف في مخروط ثمرة الصنوبر فتجد أنها 8 و5، أو في ثمرة الأناناس حيث عددها 13 و 8 وهما في كلتا الحالتين عددان متتاليان من المتتالية المعنيّة.

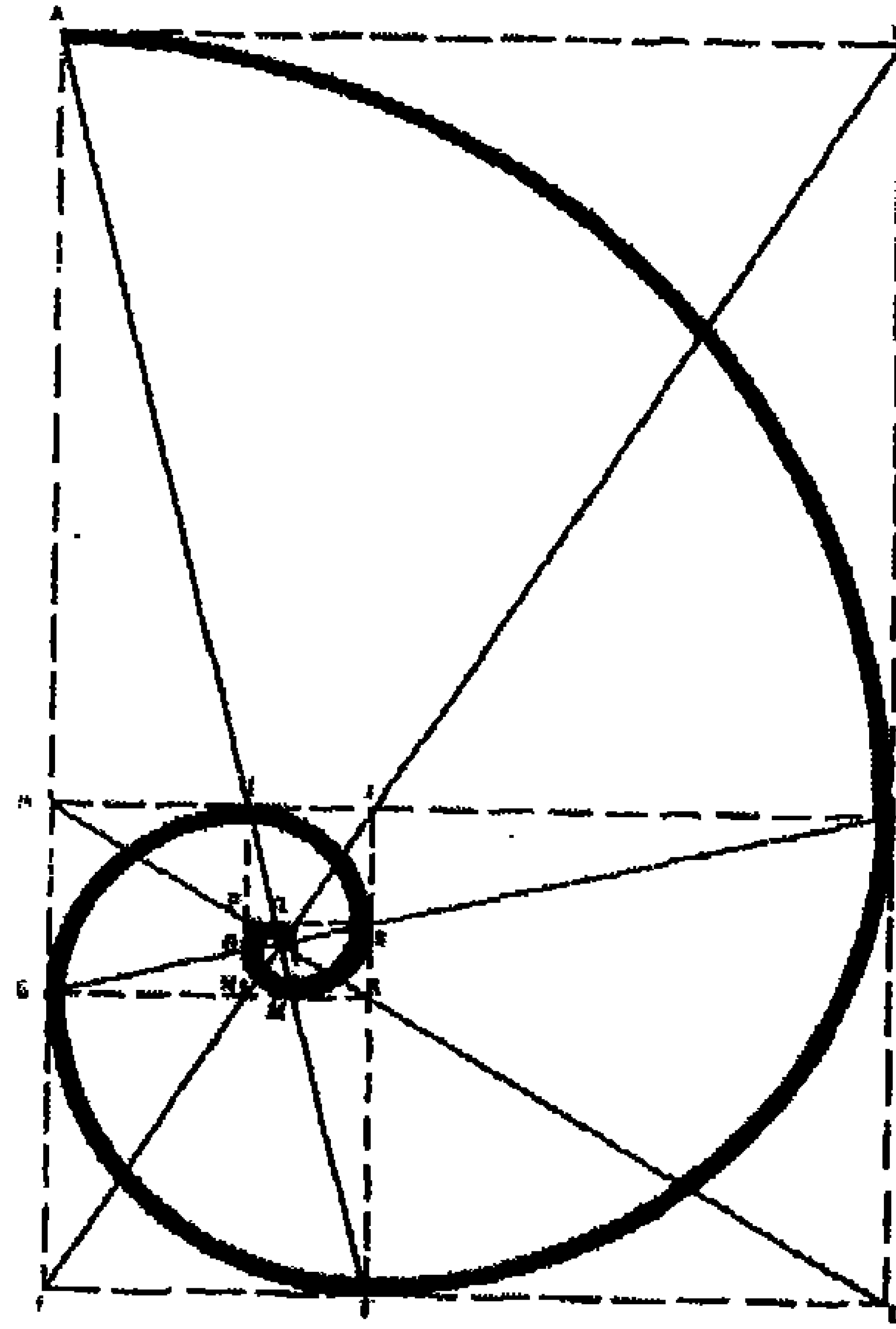
نجد النسبة الذهبية أيضًا في الكثير من الأشكال الهندسية كالدائرة والمخمّس والمضلّع المنتظم الذي له عشر أضلاع. كما نجدها في الهرم. أما الغريب الغريب فهو وجودها في جسم الإنسان: أغلب الظنّ أنّك تعرف تمامًا طول قامتك وقد قستها عدّة مرّات. ولكن هل خطر ببالك مرّةً أن تعرف مقدار ارتفاع سرّتك عن سطح الأرض؟ وهل خطر لك بعد ذلك أن تحسب نسبة طول قامتك إلى ارتفاع سرّتك؟ جرّب الأمر، ولا تُصب بدهشةٍ كبيرة إذا وجدتها قريبةً من النسبة الذهبية خصوصًا إذا كان جسمك جميلاً متناسقًا واعلم أنّ هذه النسبة هي أحد المقاييس التي يستخدمها الحكّام في مسابقات انتقاء ملكات الجمال!

يُقالُ أيضًا أنّ نسبة طول الرأس (بين أعلى نقطةٍ فيه وأسفل الذقن) إلى ارتفاع موضع الغدّة الصنوبرية (وهي الغدّة التي ما تزال أسرارها مستعصيةً على الأطبّاء وعلماء الفيزيولوجيا والمسؤولة، كما يُظنّ، عن المقدرات الحدسية والحاسّة السادسة عند الإنسان) عن أسفل الذقن أيضًا، تساوي أيضًا النسبة الذهبية.

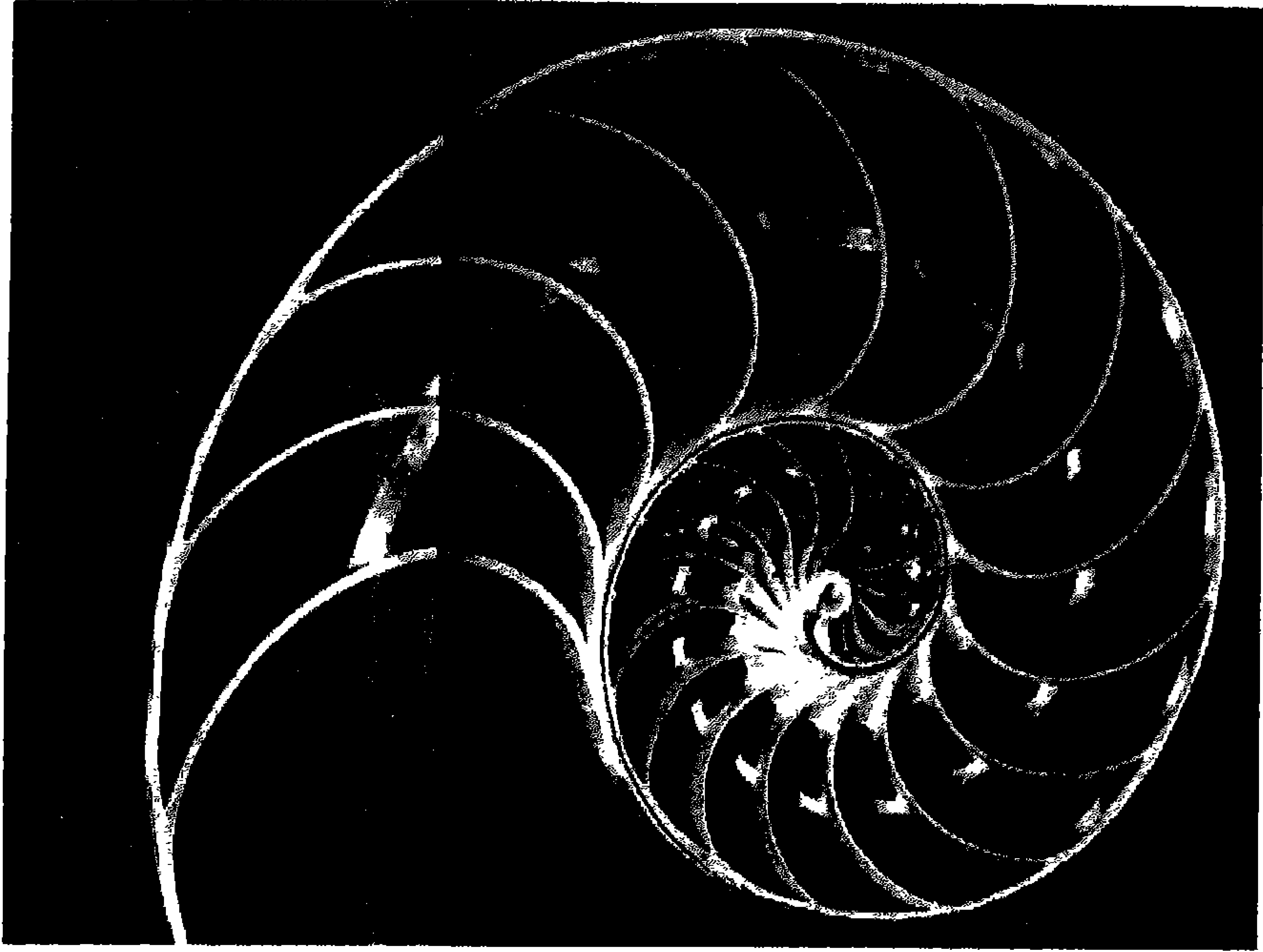
ثمّة الكثير ليقال بعد حول هذا الموضوع وهناك كتب بكاملها تتحدّث عن العدد الذهبي. ولكن ولكي لا نخرج كثيرًا من ميدان الرياضيات نقدّم فيما يلي التعريف الدقيق لهذا العدد.

ما هو طول مستطيل عرضه يساوي الواحد ويحقّق الخاصّة التالية: إذا حذفنا من هذا المستطيل مربّعًا طول ضلعه يساوي عرض المستطيل (أي واحد) نتج لدينا مستطيلاً جديدًا نسبة طوله إلى عرضه تساوي نسبة بعدي المستطيل الأصلي؟

إذا فرضنا أنّ x هو الطول المطلوب، فإنّ نسبة بعدي المستطيل الأصلي هي $x/1$ أما نسبة بعدي المستطيل الجديد فهي $1/(x-1)$ ويعطي تساوي النسبتين العلاقة: $x^2 - x = 1$ وهي معادلة من الدرجة الثانية يمكن حلّها بسهولة لنحصل على حلين نختار الموجب منهما وهو: $x = (1+\sqrt{5})/2$ ويساوي تقريبًا 1.618. يسمّى المستطيل الذي يتمتع بالخاصة المذكورة مستطيلاً ذهبيًا وتستطيع أن تلاحظ ببساطةٍ إذًا أن المستطيل المتبقّي بعد حذف المربّع هو مستطيلٌ ذهبيٌّ أيضًا أي أننا لو حذفنا منه مربّعًا جديدًا لبقي مستطيل أصغر له نفس نسبة البعدين. نستطيع بعد ذلك رسم ما يسمّى بالحلزون اللغاريتمي.



يُرسَم الحلزون اللغاريتمي ضمن مجموعة متتالية من المستطيلات الذهبية



والحلزون اللغاريتمي هو نفس الحلزون الذي نجده في الطبيعة

لنرمز للعدد الذهبي بالحرف اليوناني Φ ولنلاحظ أنّ:

$\Phi^2 = \Phi + 1$ أي $1.618^2 \approx 2.618$

$1/\Phi = \Phi - 1$ أي $1/1.618 \approx 0.618$

الغريب أنّ معظم المستطيلات التي نستخدمها (الكتب، الصناديق، الطاولات،...) هي مستطيلات نختارها على نحوٍ عفويّ قريبةً جداً من أن تكون مستطيلات ذهبية! أمّا العالم الكبير والفنّان العظيم ليوناردو دافنتشي L. De Vincci، فقد ترك لنا، من بين الإرث العظيم الذي تركه لنا، كرّاسًا يبحث في النسبة الذهبية وخواصها، ويُقال أنّه كان يستخدمها في الكثير من رسومه، والله أعلم.

أوروبا تحمل المشعل

اقرّ، دون ان يجرح ذلك كبريائي، انّ الغرب قد تلقّى، في الزمن الحاضر، رسالة تثقيف العالم.

رابندرانات طاغور.

فهل تستطيعون ان تحملوا مشعل العلم، وان تدعُوه يتوهج، وان تُحسنوا استخدامه، فلا يسقط من ايديكم فوق الأرض، فتلتهمنا ناره كلّنا؟

برتولد بريخت

تتطوّر الرياضيات بسرعةٍ كبيرة وعلى نحوٍ أسّيّ. ويبدو مستحيلاً اليوم الإلمام بكلّ التطوّرات الرياضيّة في مختلف الفروع ولا بدّ لنا منذ الآن، في رواية تاريخ الرياضيات، من تلخيصٍ أكبر بكثير ممّا سبق، ومن الاكتفاء باستعراض الخطوط العامّة لتطوّر الرياضيات بما يخدم غرض هذا الكتاب في محاولة فهم المعنى العميق للرياضيات اليوم أكثر من رواية القصّة الكاملة لتطوّرها، الأمر الذي يستحيل في كتابٍ بهذا الحجم.

الثورة الديكارتية:

غالبًا ما نتوجّه باللوم وأحيانًا بالسخرية من أبنائنا او طلابنا عندما يُبدون اعتراضهم أو شكّهم في المفاهيم التي نلقّنهم إياها. وفي كثير من الأحيان يكون سبب ذلك أنّنا قد تلقنّاها نحن أنفسنا دون أن يخطر في بالنا أن نتساءل عن مدى صحّتها ومصداقيتها.

لقد شكّك ديكارت الشابّ بكلّ حقائق وقيم عصره! العقائديّة والاجتماعيّة والعلميّة والفلسفية... ولم يكتفِ بالتعبير عن ذلك في كتاباته، بل كان مسلكه في الحياة تعبيرًا عن هذا الرفض أيضًا. حتّى أنّ أشهر عباراته التي يعرفها أقلّ الناس ثقافةً كانت "أنا أشكّ فإذًا أنا موجود" فلقد جعل ديكارت من الشكّ مرادفًا للوجود. وأعتقد من جهتي أنّ في ذلك الكثير من الصحّة. فالشكّ هو التعبير عن الأصالة الشخصيّة وعن رفض المرء أن يكون فردًا من قطيع مُساقًا، سواء من قبل غيره أو من قبل الأعراف أيّاً يكن نوعها...

لا جرم أنّ ديكارت الشاب لم يكن الأوّل ولا الوحيد الذي واجه هذا الشكّ، والذي كثيرًا ما ينقلبُ أزماتٍ نفسيّة عند أشخاص آخرين. لكنّ نتيجته عند ديكارت كانت استثنائيةً فعلاً. فلقد غيّر ديكارت حقّاً طريقة تفكير البشر! وهو يعتبرُ واحدًا من الّذين ساهموا بقدرٍ كبير في نقل أوروبا من مجتمع التنجيم والأبراج والسحر إلى مجتمع العلم والرياضيات.

لقد سحرت ديكارت الطريقةُ المنطقيّة المتماسكة التي بنيت وفقها الهندسة ابتداءً من عددٍ محدودٍ من المسلّمات وقرّر أنّ الفلسفة والمعرفة

بجملتها، يجب أن تُبنى بطريقةٍ مشابهة ووضع كتابًا مشهورًا عنونه "بيان المنهج في حسنِ سياسة العقل والبحث عن الحقيقة في العلوم" وهو واحدٌ من الكتبِ الفلسفيةِ الأساسيّة حتّى اليوم ويُعرَفُ بعنوانه المختصَر: "بيان المنهج Discoures de la mthode". شرح ديكارت في كتابه هذا فلسفته الجديدة وقد ختمه بثلاثة أمثلةٍ عن الطريقة الصحيحة في التفكير، بحسب رأيه طبعًا، وكان آخر هذه الأمثلة هو الهندسة التحليليّة.

أتردّدُ بين استخدام تعبيرين أعتقد أنّ كلاهما صحيح: "ابتكر ديكارت الهندسة التحليليّة"، و"اكتشف ديكارت الهندسة التحليلية". هل الرياضيّات شيءٌ موجودٌ ونحن نكتشفه بالتدريج، أم أنّها بالأحرى ابتكارٌ إنسانيّ، أم خليطٌ من هذا وذاك؟ إنّه سؤالٌ كبير. وسنعود إليه لاحقًا. لكنّني أدعو القارئ منذ الآن أن يتفكّر به قليلاً لعلّنا نتحاور حوله في حينه.

في كلّ الأحوال عبّر ديكارت عن أنّنا نستطيع استخدام الأعداد لتمثيل نقاط سطحٍ معيّن. وشرح ذلك بطريقةٍ يعرفها كلّ الناس في تقسيم سطح الأرض وفق خطوط الطول والعرض. فنحن نحدّد موقع مدينةٍ ما بحسب العدد الدالّ على خطّ الطول الّذي تقع عليه (شرق أو غرب غرينتش) والعدد الدالّ على خطّ العرض الذي تقع عليه أيضًا (شمال أو جنوب خطّ الاستواء. وهكذا فإنّ زوجًا من الأعداد يمثّل نقطةً من سطح وإذا كان هذا السطح مستويًا واتّخذنا عليه مستقيمين مبدئيّين أحدهما أفقيّ والآخر شاقوليّ (نسمّيهما اليوم في الرياضيات محورين ديكارتيين) فإنّه يمكن تمثيل كلّ نقطةٍ من المستوي بزوجٍ مرتّبٍ من الأعداد يدلّ أوّلهما على بعد

النقطة عن الخطّ الشاقولي ونقرنه بإشارة + (بدلاً من أن نقول شرق) إذا كانت النقطة إلى يمين هذا الخطّ (ونقول في هذه الحالة أنّه عدد موجب) وبإشارة - إذا كانت إلى يساره (ونقول أنّه عددٌ سالب)؛ بينما يدلّ العدد الثاني على بعد النقطة عن الخطّ الأفقي ويكون موجبًا إذا وقعت النقطة فوق (شمال) هذا الخطّ وسالبًا إذا كانت تحته.

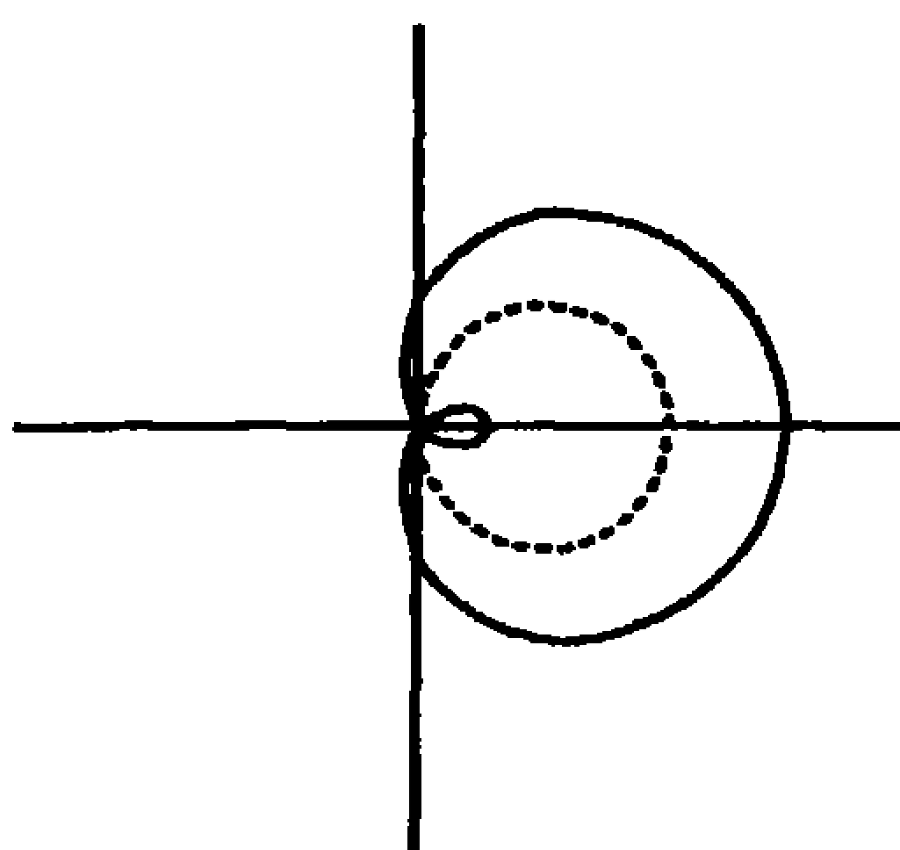
إضافةً إلى فكرة تمثيل النقاط بأزواجٍ من الأعداد كانت الفكرة البسيطة جدّاً والرائعة جدّاً والتي كانت قد اختمرت طويلاً أيضًا قبل أن تتضح على يدي ديكارت هي فكرة الترميز الرياضي. أي تمثيل المقادير بأحرف اللغة وقد اختار ديكارت الأحرف الأخيرة من الأبجدية اللاتينية (x, y, z) لتمثيل المقادير المجهولة (التي ستأخذ قريبًا اسمًا آخر هو المتحولات) والأحرف الأولى منها (a, b, c) لتمثيل المقادير المعلومة.

لاحظ ديكارت إمكانية دراسة المعادلات من خلال الهندسة التحليلية: فإذا رجعنا قليلاً إلى الوراء وتذكّرنا المعادلات الديوفانتية التي تحوي مجهولين، وسنسمّي المجهول من الآن فصاعدًا متحوّلاً لأنّه يعبّر عن مقدارٍ ذو قيمةٍ متغيّرة بحيث يؤدّي تغيّرها إلى تغيّر المقدار الآخر (المتحوّل الآخر) في المعادلة، وإذا تذكّرنا المعادلة التي تربط زيادة الرواتب بزيادة مصروف الموظّف وهي $x = 2y + 100$ نلاحظ أنّ التغيّر في قيمة x يؤدّي إلى تغيّير قيمة y وسندعو مثل هذه العلاقات فيما بعد، وضمن شروطٍ معيّنة، توابعًا. لكنّنا سنبقى في موضوعنا هذا الآن. لنستعض من أجل التبسيط قليلاً عن المائة بالعدد 1 في العلاقة السابقة فتصبح كما يلي: $x = 2y + 1$ إذا كانت y تساوي الصفر فإنّ x ستأخذ القيمة 1 وإذا

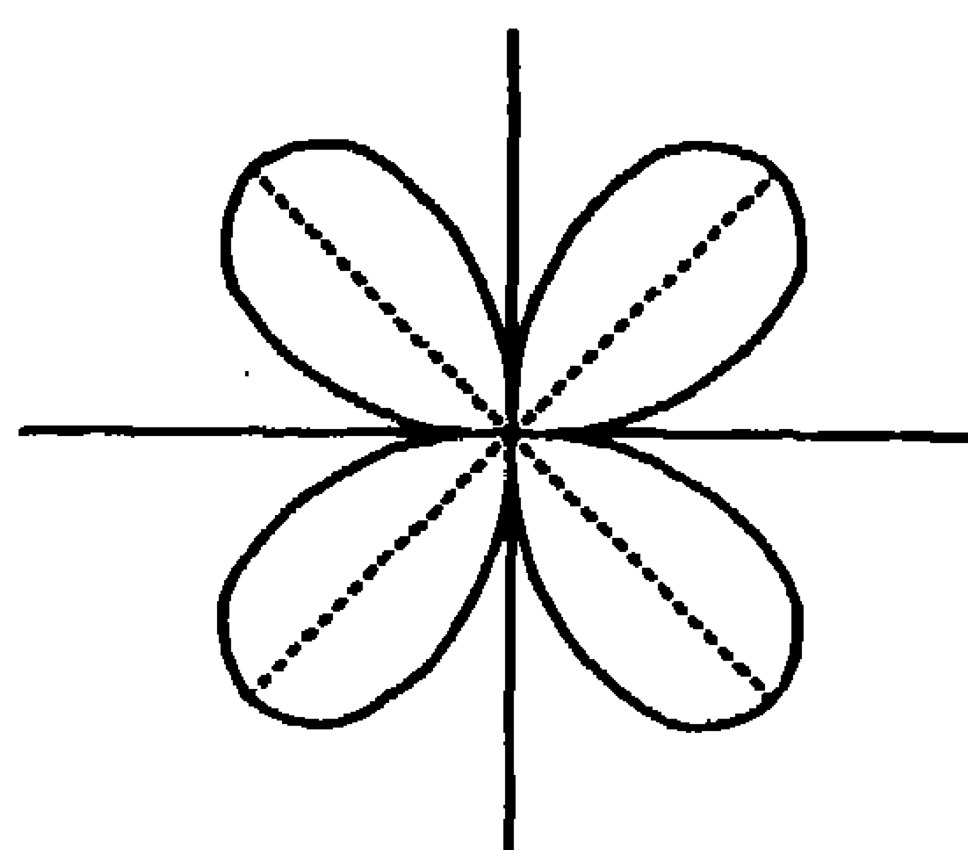
أخذت y القيمة 1 فإنّ x ستأخذ القيمة 3 ويمكن بسهولة الحصول على جدول يقرن كل قيمة يأخذها المقدار y بالقيمة الموافقة التي سيأخذها x لكي تبقى المعادلة صحيحة.

x	0	1	2	3	4	...
y	1	3	5	7	9	...

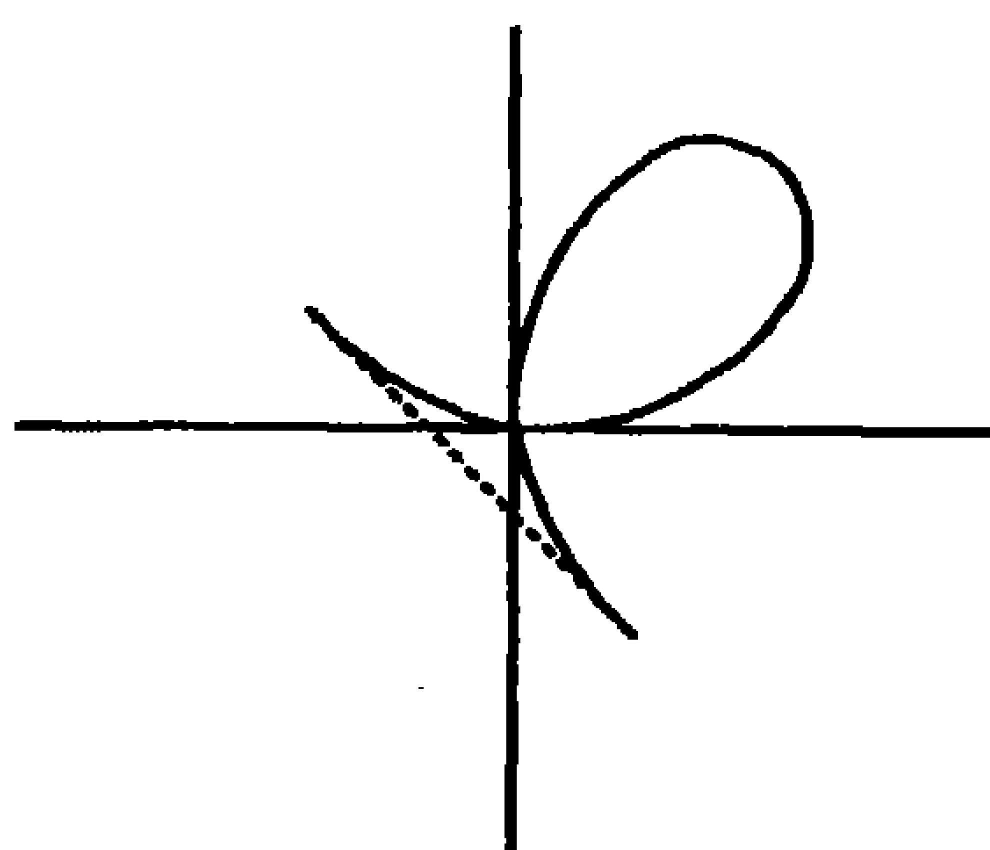
وإذا عيّنّا النقاط التي تمثّلها هذه الأزواج من الأعداد على ورقة رسمنا عليها محورين إحداثيّين (يمكن استخدام ورقًا ميليمتريًا من أجل الدقّة) فإنّنا سنلاحظ المصادفة العجيبة التالية: وهي أنّ جميع هذه النقاط تقع على مستقيمٍ واحد. وهذه المصادفة ليست مصادفةً أبدًا في الواقع مع بقائها مدهشة، لأنّه سيُبرهَنُ فيما بعد أنّ كلّ علاقةٍ بين متحوّلين من الدرجة الأولى (أي خالية من قوى x وy التي يزيد أسُّها عن الواحد) تُمثّل في المستوي بخطٍّ مستقيم. ويلاحظ ديكارت في هندسته التحليليّة هذه أنّ جميع المعادلات التي تربط بين متحوّلين وتحوي على السواء حدودًا من الدرجة الأولى وأخرى من الدرجة الثانية ليس إلا، تُمثّلُ في المستوي بشكلٍ يشبه شكلاً ناتجًا عن قطع مخروطٍ دائريٍّ بمستوٍ (أنظر الشكل الخاصّ بالقطوع المخروطيّة في الفصل السابق) وهكذا انتقل ديكارت بعدئذٍ لدراسة المعادلات من الدرجات الأعلى وتابع العديد من العلماء من بعده هذه الدراسة وانصرفوا في أوقاتٍ أخرى لوضع منحنياتٍ غريبة مع ما يقابلها من معادلات لا لشيءٍ آخر غير التسلية والمتعة وتمرين العقل!



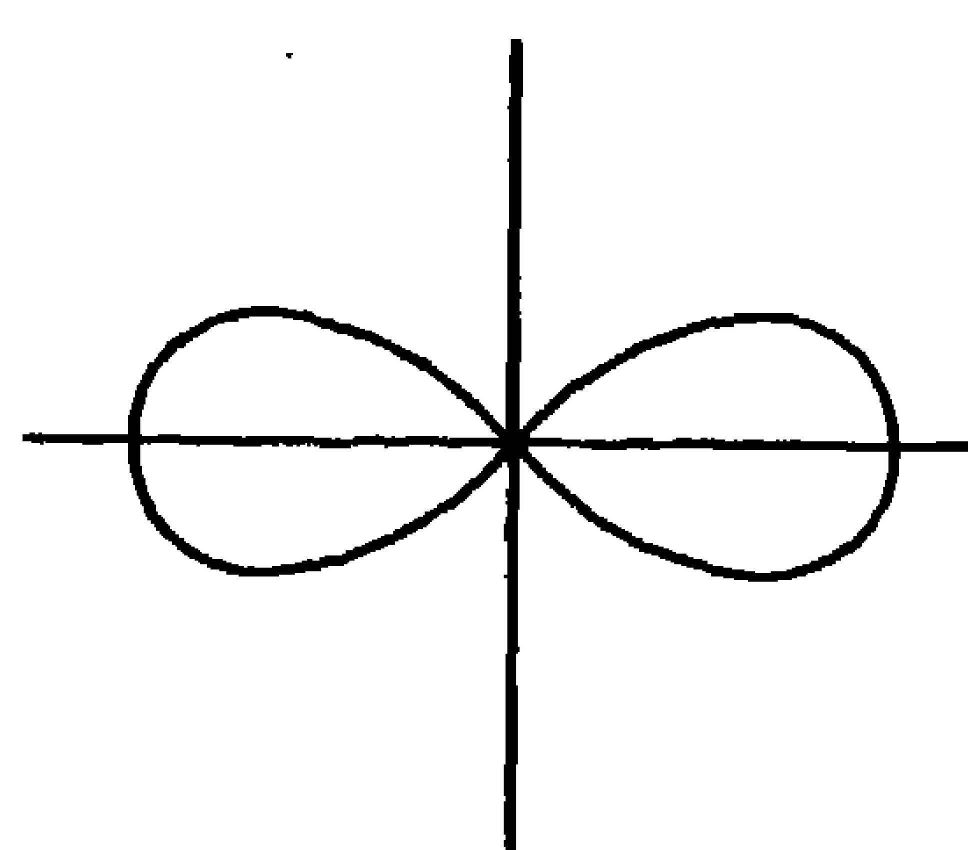
$(x^2+y^2)^2=4a^2x^2y^2$



$(x^3+y^2+ax)^2=b^2(x^2+y^2)$



$x^2+y^2=3axy$



$(x^2+y^2)^3=a^2(x^2-y^2)$

بعض المنحنيات ذات الأشكال المتناظرة

التي ارتبطت بأسماء بعض مشاهير الرياضيين

كانت الهندسة التحليليّة، وهي ثمرة الزواج السعيد بين الجبر والهندسة، أرضًا خصبةً لنشوء أحد أكثر الفروع أهميّةً في الرياضيات، سواء من الناحية النظريّة أو التطبيقيّة، وهو التحليل الرياضيّ.

ثمّةَ مفارقة غريبة كثيرًا ما تتكرّر في تاريخ العلم وهي أن يقومَ عالمان مختلفان بتطويرٍ جديد، أي أن يحلا مسألةً معيّنة أو أن يكتشفا نظريّةً جديدة أو أن يقوما بابتكارٍ ما في وقتٍ واحد (أو في وقتين متقاربين) وعلى نحوٍ مستقلٍّ أحدهما عن الآخر. ولهذا الأمر دلالاتٌ عديدةٌ، منها مثلاً، إن كان القارئ يوافقني الرأي، أنّ الفكرة، إمّا نضجت وحان وقتها، لا بدّ أن ترى النور. هذا ما حدث مع ديكارت وفيرما P. De Fermat، الّذي كان قد ابتكر فكرة المستقيمَين الإحداثيّين مع ديكارت. لكنّ الثاني إنّما أحرز قصب السبق لأنّ الأوّل تأخّر أكثر منه في نشر أعماله. وهذا ما حدث مرّةً أخرى وبعد وقتٍ قصير مع نيوتن ولايبنتز الّذين علّمانا ما نسمّيه حساب التفاضل والتكامل.

ثمار الصمت

كان نيوتن من الأشخاص الميّالين إلى الصمت والتأمّل منذ صغره. ومع أنّ القصّة الشهيرة عن اكتشافه لفكرة الجاذبية من ملاحظته للتفّاحة الساقطة عن الشجرة ليست بمثبتة؛ بيد أنّها ما كانت لتُنسَجَ عن شخصٍ لم يكن يملك مثل هذا الميل. أمّا القصّة الأكثر طرافةً والتي تروى عن مدى كونه صموتًا فهي أنّه لم يقل طوال مدّة عضويته في البرلمان الأنكليزي سوى عبارةٍ واحدة طلب فيها إغلاق النافذة! ويبدو أنّه كان يُبحِرُ متأمّلاً بمواضيع أكثر أهميّةً من مناقشات زملائه.

كان نيوتن فيلسوفًا وفيزيائيّاً كبيرًا إلى جانب كونه رياضيّاً كبيرًا ويرى فيه بعض مؤرِّخي العلوم أعظم العلماء في التاريخ. أمّا نيوتن

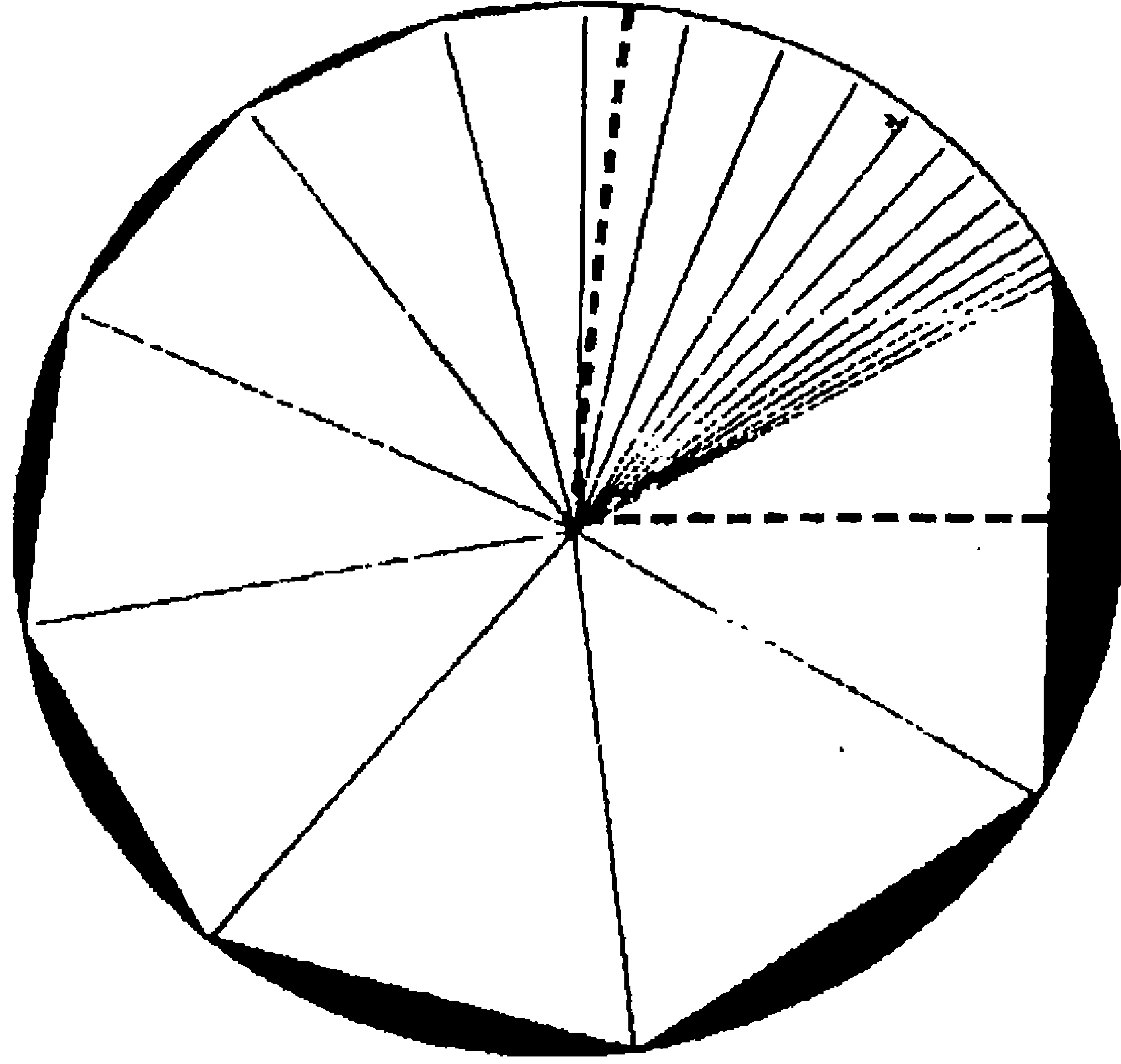
فلا يرى في نفسه، كما أسلفنا في موقعٍ آخر من هذا الكتاب، غير طفلٍ صغيرٍ يلهو على شاطئ بحر العلم فيجمع الحجارة والأصداف ويحاول أن يبني منها برجًا وهو يقول عن نفسه: إنّني أقف على أكتاف العظماء. وبهذا التواضع يثبت نيوتن عظمته حقًّا!

حساب مساحة الدائرة:

رأينا كيف حسب المصريّون القدماء مساحة الدائرة بتقريبٍ رائع لكنّ هذه الطريقة تبقى غير رياضية ففي الرياضيات لا يُعتبَرُ التقريب، مهما بلغت دقّته، مساويًا للحساب المطلوب (مساحة الدائرة مثلاً) وهنا نجد أحد الفروق الأساسيّة بين الرياضيات وبقيّة العلوم: ففي الفيزياء، كلّ قياس أو حساب أو قيمة تُعطى لمقدار فيزيائي هي قيمة تقريبيّة حتمًا ولا يوجد قيم مطلقة بتاتًا بعكس الرياضيات، عالم المطلق!

لم تكن فكرة اللامتناهيات في الصغر جديدةً تمامًا. فلقد حسب الفيثاغوريون مساحة الدائرة بالطريقة التالية: يمكن تقسيم الدائرة إلى عدد من "المثلّثات" المتساوية (كما تُقسمُ فطيرة البيتزا إلى ثمانية قطعٍ متساوية مثلاً) ولقد وضعتُ كلمة مثلّثات بين مزدوجين لكي ألفتَ النظر إلى أنّ هذه الأجزاء ليست بمثلّثات في الواقع لأنّ قواعدها أقواسٌ منحنية وليست قطعًا مستقيمة. ولكن يمكننا أن نقسم كلاً من هذه "المثلّثات" إلى اثنين متساويين وكل واحد جديد إلى أجزاء أصغر... ويمكننا الاستمرار في ذلك نظريًّا إلى ما لانهاية. وفي كلّ مرّة سيقترب الخطّ المنحني من أن يكون أكثر استقامةً ويقترب "المثلّث" من أن يكون مثلّثًا! فإذا تذكّرنا أنّ مساحة المثلّث تساوي نصف مساحة قاعدته في ارتفاعه، ولاحظنا أنّ ارتفاع كلّ واحد من هذه المثلّثات المتطابقة، في الشكل وبالتالي في المساحة، سيساوي نصف قطر الدائرةً عندما تصبح هذه المثلّثات "لامتناهيةً" في الصغَر، وأنّ مجموع مساحات هذه المثلّثات يساوي مساحة الدائرة كما أنّ مجموع أطوال القطع المستقيمة التي تشكّل قواعد هذه المثلّثات يساوي محيط هذه الدائرة. فإنّنا نستطيع أن نستنتج من كلّ هذه المعطيات أنّ مساحة الدائرة هي جداء نصف محيط الدائرة في نصف قطرها.

يبقى السؤال المحيِّر هو كيف أمكن لمجموع مساحاتِ عددٍ لانهائيّ من مثلّثات غير موجودة أن تساوي مساحةً ما هي مساحة الدائرة؟!



التكامل هو مجموع لا نهاية من الأشياء المتماثلة والصغيرة

إلى حد كونها غير موجودة !

قوانين لوصف سقوط التفاحة ودوران الكواكب

بمزاوجة فكرة اللامتناهيات في الصغر هذه مع فكرة ديكارت في التمثيل البيانيّ استطاع نيوتن أن يقدّم طريقةً عامّة لحساب مساحاتٍ محصورةٍ ضمن خطوطٍ منحنية شرطَ أن نجدَ التابع الذي يصف هذا الخطَّ المنحني. وهذه العمليّة هي ما نسمّيه بالتكامل الّذي سيجد له نيوتن تطبيقاتٍ أخرى عديدة. ومقابل التكامل يضع نيوتن عمليّةً معاكسة هي التفاضل والتي تعبّر عن معدّل تغيّر تابعٍ حين يتغيّر المتحوّل المرتبط به. فإذا عدنا لتابعنا الذي يربط زيادة مصروف الموظّف بزيادة الرواتب نلاحظ من الجدول المرفق أنّ معدّل التغيّر يبقى ثابتًا عندما يتزايد (أو يتناقص) المتغيّر على نحوٍ ثابت. ويجعلنا ذلك نخمّن أنّ العلاقة التي تربط المسافة التي يقطعها جسمٌ يتحرّك بسرعةٍ ثابتة (السرعة هي معدّل تغيّر المسافة بتغيّر الزمن) مع الزمن اللازم لقطعها لا بدّ أن تكون شبيهةً بمعادلة زيادة المصروف السابقة وهذا صحيحٌ تمامًا فالمسافة تُعطى بدلالة الزمن بمعادلةٍ من الدرجة الأولى حين تكون السرعة ثابتة. أمّا إذا كانت السرعة متغيّرة بانتظام أي أنّ هناك تسارعاً ثابتاً للجسم المتحرّك، أي أنّ سرعة الجسم تتزايد بمعدّل ثابت، فإنّ المعادلة ستكون من الدرجة الثانية.

وقد استخدم نيوتن مفاهيمه الجديدة هذه بشكلٍ خاصّ من أجل شرح سقوط التفّاحة عن التفّاحة، أي ما نسمّيه اليوم السقوط الحرّ، وشرح دوران القمر حول الأرض والأرض حول الشمس. وما تزال قوانين الحركة التي وضعها نيوتن تستخدم حتّى اليوم في وصف حركة كلّ جسمٍ كبير (ليس جسمًا ذريّاً) تقع سرعته ضمن حدودٍ معيّنة (صغيرة بالمقارنة مع سرعة الضوء).

أمّا لايبنتز فكان حقوقيًا محترفًا عمل في السياسة أيضًا وهو أوّل من استخدم تعبير "توازن القوى" الذي أصبح أكثر التعابير شيوعًا في زمن الحرب الباردة. وكان إلى جانب ذلك رياضياً هاويًا ، درس الرياضيّات لمجرّد المتعة ووضع الحساب التفاضليّ والتكامليّ بشكلٍ مستقلّ عن نيوتن. ومع أنّ نيوتن سبق لايبنتز في وضع أصول هذا الفرع من الرياضيّات إلا أن لايبنتز هو الذي نشره أولاً. ومع ذلك فلقد استخدمه نيوتن في الفيزياء على نحوٍ غيّر وجه العلم تغييرًا جذرياً في حين كانت أعمال لايبنتز رياضيّةً بحتة.

توصف حركة جسمٍ ما بمعادلةٍ تفاضلية. إذا كان الجسم يتحرّك بسرعةٍ ثابتة مثلاً، فإنّ: $v = \frac{dx}{dt} = c$ (حيث v رمز السرعة في الفيزياء، وc تمثّل عددًا ما و dx/dt تعبير عن نسبة تغير المسافة مع تغير الزمن وهي السرعة نفسها) هي المعادلة التفاضلية التي تصف الحركة وهي معادلة بسيطة يعطي تكاملها المعادلة : $\chi = v_0 t + x_0$ التي تصف تغيّر موضع هذا الجسم على مستقيم.

تصبح المعادلة التفاضلية أكثر تعقيدًا كلّما كانت حركة الجسم أكثر تعقيدًا. ونصبح مضطرين لاستخدام أكثر من معادلة تفاضليّة واحدة عندما يكون لدينا منظومة من الأجسام. هكذا صار حلّ المعادلات التفاضليّة فرعًا قائمًا في ذاته، بل إنّ فروعًا بحالها نشأت في الرياضيات بسبب الحاجة لحلّ معادلة تفاضليّة واحدة.

إنّ التقدّم الكبير الّذي تحقّق في جيلي ديكارت ونيوتن، لم يكن مع ذلك سوى فتح أبوابٍ جديدة على تطوّراتٍ لم يكن ديكارت ولا نيوتن

يتصوّرانها ، في الرياضيات وفي غير الرياضيات، في العلم، وفي الفكر الإنساني بكليته. سنرى تفصيل ذلك في الفصول القادمة. لكنّني أريد أن أقول شيئًا بخصوص شخصيّتي ديكارت ونيوتن المتناقضتين من زاويةٍ ما.

لقد علّمنا ديكارت الهندسة التحليلية، وأشياء أخرى في خواص المرايا والعدسات... وطرح فضلاً عن ذلك الكثير من المفاهيم الفلسفية التي ما تزال تحمل أهميّةً كبيرة. لكنّ حياته تركت لنا، ولشبابنا على الأخصّ، وصيّةً أكثر أهميّة على ما أظنّ: ثقوا بأفكاركم ولو كانت تعارض كلّ التقاليد والأعراف! أمّا نيوتن الذي ترك لنا ثروةً من الاكتشافات في الفيزياء وفي الرياضيات على السواء فقد قدّمت لنا حياته وشخصيّته وصيّةً مقابلة: تحلّوا بالصبر وخصوصًا بالتواضع! وما أعتقده هو أنّ العالِمَ الحقيقيّ، وبشكلٍ عامٍّ المفكّر الحقيقيّ، هو الّذي يستطيع، نظير ديكارت، أن يكون معارضًا مجدِّدًا، يرفض ويشكّ بكلّ ما هو موروث وفي الوقت عينه أن يرى في هذا الموروث، على غرار نيوتن، ضرورةً مناسبةً لزمانه ودرجةً على سلّم ارتقاء البشريّة؛ معترفًا بتواضعٍ بفضل الأوائل ومستفيدًا من غنى التجربة الإنسانيّة بشتّى ميادينها.

الملحق الثالث

أعدادٌ وهميّة، والعياذ بالله!

خلق الله الأعداد الطبيعية، وكلّ الأعداد الأخرى اخترعها الإنسان.

ليوبولد كرونيكر

تكتسب الفكرة الرياضية الكثير من الحياة والجمال عندما توضع في إطارها التاريخيّ وعندما تُدرَّسُ بحسب تطوّرها عبر أجيالٍ من الرياضيين. إنّني لأستغربُ ألا يُشار في المناهج الجامعيّة والمدرسيّة إلى هذه القصّة الممتعة والجزيلة الفائدة التي سأرويها باختصار هنا. بل أستغرب أكثر من ذلك أن يتخرّج الطلاب من قسم الرياضيات حاملين إجازةً في الرياضيات البحتة وهم لا يعرفون إن كان هناك صيغة حلٌّ عام لمعادلات الدرجة الثالثة أو لا. سيّما أنّهم سيتعرّضون لمثل هذا السؤال من طلبتهم العتيدين في الصفوف الثانوية.

نشر راهبٌ إيطاليّ يدعى لوقا باتشيولي L. Pacioli، في العام ١٤٩٤ كتابًا يشرح فيه كلّ مكتشفات الجبر المعروفة حتّى ذلك الوقت وقد أنهى

الكتاب بإشارةٍ إلى عجز العلماء عن إيجاد طريقةٍ عامّة لحلّ معادلات الدرجة الثالثة على غرار الطريقة العامّة التي تحلّ أيّ معادلة من الدرجة الثانية.

أثارت هذه الملاحظة أستاذ الرياضيات في جامعة بولونيا تشيبيوني دلفرّو Scipione del Ferro الّذي اعتبرها تحدّياً له واستطاع بعد فترةٍ قصيرة إيجاد حلٍّ جبريّ لشكلٍ خاص من المعادلة التكعيبية وهو: $x^3 - px = q$

وذلك كما يلي:

نفترض حلاً x يكون مجموعًا لعددين u, v أي $x = u + v$ فعندئذٍ:

$$(u+v)^3 - p(u+v) = q$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - p(u+v) = q$$

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - p(u+v) = q$$

$$u^3 + v^3 + (3uv - p)(u+v) = q$$

فإذا لاحظنا أنّ الحدّ $u+v$ في الطرف الأوّل ينعدم عندما $3uv - p = 0$ فإنّ $u+v$ يكون حلاً عندما تتحقق في آن واحد العلاقتان:

$$3uv - p = 0 \qquad (1)$$

$$u^3 + v^3 = q \qquad (2)$$

والعلاقة الأولى تعطي بتكعيبها:

$$u^3v^3 = p^3/27 \qquad (3)$$

والمعادلتان الأخيرتان هما مجموع وجداء u^3 و v^3 وهذا يعني أنّ u^3 و v^3 هما جذرا المعادلة التربيعية $z^2 - qz + p^3/27 = 0$ وهذه المعادلة تعطي بحلّها وفق طريقة المميّز المعروفة:

$$z_1 = u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^2}{27}}, \qquad z_2 = v^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^2}{27}}$$

وإذًا:
$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} \quad (4)$$

ولم ينشر صاحبنا ما توصّل إليه. أغلب الظنّ، لأنّه كان يريد المحافظة عليه كسلاحٍ سريٍّ في المباريات الرياضية التي كانت تجري كثيرًا في ذلك الوقت. وقد وصل هذا الحلّ عن طريق أحد تلاميذ دل فرّو إلى رياضيٍّ آخر يدعى جيروم كاردانو J.Cardano الّذي لاحظ أيضًا أنّه يمكن تحويل أيّ معادلة من الدرجة الثالثة: $y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0$ إلى الصيغة $x^3 - px = q$ وذلك بمجرّد إجراء التحويل: $y = x - a_1/3$ (يستطيع القارئ التحقّق من ذلك بسهولة) وبذلك تكون الطريقة العامّة لحلّ هذه المعادلة قد وُجِدَت. كان كاردانو أوّل من نشر هذا الحلّ فسميّت العلاقة (4) صيغة كاردانو.

بقيت مشكلة كان لا بدّ من تجاوزها: ماذا لو كان المقدار: $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$ سالبًا؟ سنجد عندئذٍ أنّ لدينا جذرًا تربيعيًا لعدد سالب.

ولنأخذ مثالاً على الطريقة التي كان الرياضيون يتغلّبون وفقها على هذه الصعوبة:

لتكن المعادلة: $x^3 - 15x = 4$

يعطي دستور كاردانو ما يلي: $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ وهي علاقة تبدو بلا معنى بسبب وجود الجذر السالب. ولكن لنلاحظ مايلي:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

لنستبدل في هذه المتطابقة a, b بـ $2, \sqrt{-1}$ فنجد:

$$(2+\sqrt{-1})^3 = 8 + 3\times 4\sqrt{-1} + 3\times 2(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3$$

كان الرياضيّون منذ بداية القرن السادس عشر وحتّى مجيء غاوس يتعاملون مع هذا الكائن الغريب $\sqrt{-1}$ وكأنّه عدد تنطبق عليه جميع العمليات المعهودة والمعرّفة على الحدود الجبرية، من جمع وضرب ورفع إلى قوّة... مع الأخذ بعين الاعتبار أنّ $(\sqrt{-1})^2 = -1$ وذلك دون أي تبرير يشرّع هذا الاستخدام.

في جميع الأحوال تُختزل العلاقة الأخيرة السابقة إلى:

$$(2+\sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}$$

وبأخذ الجذر التكعيبيّ للطرفين نحصل على:

$$(2+\sqrt{-1}) = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$$

كما نستطيع بطريقةٍ مشابهة أن نجد أنّ $(2-\sqrt{-1}) = \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$

مما يعطي في النتيجة:

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

وبذلك نكون قد تخلّصنا من الجذر السالب المزعج وحصلنا على جذر للمعادلة يمكن تعويضه بسهولة والتأكّد منه.

كان العدد التخيّلي يشبه جنيّاً خيّرًا. يظهر فجأةً في طريق الرياضي الذي يسير مغامرة حلّ معادلة الدرجة الثالثة. فيساعده على إيجاد الجذر ويختفي فجأةً حالما يكون هذا الجذر قد ظهر! ولقد ظلّ الأمر كذلك تقريبًا حتّى مجيء غاوس K. F. Gauss، الذي أوجد التمثيل الهندسيّ للأعداد العقديّة ووضع قواعد العمليّات عليها لتدخل بعد ذلك وسريعًا في شتّى ميادين الرياضيات. حتّى يصير التحليل العقدي وهو الفرع من الرياضيات الذي يدرس التوابع العقديّة، أحد أكثر فروع الرياضيات أهميّةً سواء من الناحية النظرية أو في التطبيقات الفيزيائية.

الرياضيات الجديدة

ما أن يتقن الطالب الحساب والهندسة والجبر والهندسة التحليلية وحساب التفاضل والتكامل، حتى يصبح جاهزًا للبدء بدراسة الرياضيات!

ديفيد برغاميني

لا أدّعي قطّ أنّني أقدّم بأمانةٍ كامل التاريخ الحقيقيّ للرياضيّات. بل إنّ ما أهمله ليزيد كثيرًا عمّا أتعرّض له، ويزداد ذلك كلّما اقتربنا في الزمن نحو الحاضر. لكنّ لي في ذلك عدّة أعذارٍ: فالكتاب يتوجّه إلى القارئ غير المختصّ بالرياضيات أولاً، ومن البديهي أنّ مزيدًا من العمق والتوسّع يقتضي المزيد من الصعوبة الرياضيّة ناهيكم عن الزيادة في حجم الكتاب. كما أنّ التسارع الكبير في نموّ الرياضيات من جهة والازدياد الهائل في التعميم والتجريد من جهة أخرى، ولاسيّما منذ بداية القرن التاسع عشر تحديدًا، يجعل التفكير برواية تاريخ الرياضيّات أمرًا مشابهًا للتفكير بقطع المحيط الأطلسيّ مشيًا على القدمين! إنّني أحاول أن أعطيَ لقطاتٍ أساسيّة من هذا التاريخ بحيث تساعد في إدراك تطوّر البناء الرياضيّ وفي العمق في إدراك تغيّر دلالة كلمة رياضيّات خلال التاريخ وهو الأمر الذي سنتعرض له لاحقًا.

نكتفي بالقول الآن أنّ الرياضيات بدأت تشهد توسّعًا كبيرًا باتّجاه التعميم والتجريد منذ النصف الثاني من القرن الثامن عشر. الأمر الذي كان مصدر قلقٍ لبعض الرياضيّين الذين أعربوا عن تخوّفهم من المسار الذي تتخذه الرياضيات.

النفق المظلم

لم تعد الرياضيّات مجرّد الجبر والهندسة. فقد ظهرت نظريّة الاحتمالات وشهدت نظريّة الأعداد تطوّرًا كبيرًا لا سيّما على أيدي فيرما وأولر L. Euler ، وغيرهما وأدخل هذا الأخير التحليل الرياضيّ في استعمالاتٍ جديدة مطبّقًا إيّاه على السطوح والمنحنيات وأعاد كلٌّ من لاغرانج J. L. Lagrange ولابلاس P. S. De Laplace، وبطريقتين مختلفتين، صياغة ميكانيك نيوتن على نحوٍ رياضيٍّ مجرّد. وبدأت قضايا التوابع وأنماطها والاستمرار والانقطاع وقابليّة الاشتقاق وغير ذلك من الأمور تطرح نفسها على الرياضيّين. كما ظهرت من جهةٍ أخرى مسألة الأبعاد. فإذا كانت علاقة بثلاثة متحولات تمثّل سطحًا أو منحنٍ في الفضاء الثلاثيّ فما الذي تمثّله علاقة بأربعة متحولات أو أكثر؟ وهل يحقُّ لنا بالأولى أن نفترضَ وجودَ مثل هذه العلاقة؟

كتب لاغرانج عام 1781 رسالةً لأحد أصدقائه، وهو رياضيٌّ وفيزيائيّ آخر يدعى دالامبير J. L. D'Alembert ، يعبّر فيها عن خوفه من أن الرياضيات قد بدأت تتّسع أكثر ممّا يجب وأنّها مهدّدةٌ بخطر الزوال. وقد انصرف لاغرانج فعلاً عن الرياضيات ليهتمّ على الأكثر

بالفيزياء والكيمياء. أمّا دالامبير ، الذي كتب ضمن تقريرٍ قدّمه لأكاديميّة العلوم الفرنسيّة: "*إنّه لمن الصعوبة بمكان أن نرى تقدّمًا يزيد عمّا حصل. ففي كلّ فرعٍ من فروع الرياضيات على وجه التقريب، يتوقّف العلماء أمام صعوباتٍ لا يمكن تجاوزها. إن التقدّم في التفصيلات والأمور الثانوية هو الشيء الوحيد الباقي إنّ جميع هذه الصعوبات تؤكّد أنّ مقدرتنا على التحليل قد أُفرِغت من محتواها تقريبًا* " ، فكان يشجّع تلاميذه، رغم كلّ شيء، بعبارةٍ رائعة: "*تابعوا المسير قدمًا تجدوا الإيمان حليفكم*". في المحصّلة، شهدت نهاية القرن الثامن عشر جدبًا كبيرًا في الرياضيّين وفي الإنتاج الرياضيّ، لا سيّما مع رحيل كبار رياضيّي القرن برنولي D. Bernoulli، وأولر، ودالامبير. ولكن،... في الرياضيات أيضًا كما في الحياة، يولدُ النهار دومًا من قلب الليل كما تنتش حبّات القمح تحت ثلوج الشتاء.

يُعتَبَرُ العام 1799 زمنًا فاصلاً في تاريخ الرياضيات. ففي هذا العام قدّم "أمير الرياضيات" أو "موتسارت الرياضيات" كارل فريدريك غاوس أطروحته لنيل شهادة الدكتوراه فأثبت فيها ما يسمّى النظرية الأساسيّة في الجبر والقائلة بأنّ عدد جذور أيّةِ معادلة جبريّة يجب أن يساوي درجة هذه المعادلة. ومن أجل برهان ذلك أبدع غاوس التمثيل الذي نعرفه اليوم للأعداد العقديّة التي كان الرياضيّون يستخدمونها بحذر طوال أكثر من قرنين دون أيّ تبرير على النحو الّذي رأيناه في الملحق السابق. وافتتح غاوس بذلك عهدًا جديدًا من تطوّر الرياضيات.

العصر الذهبيّ

ومع غاوس ومن تبعه من رياضيّي القرن التاسع عشر، مثل بولزانو B. Bolzano وكوشي A. L. Cauchy وآبل N. H. Abel، تسارع نموّ الرياضيات بشكلٍ لم يسبق له مثيل. وشكّلت أفكارٌ كانت قد ظهرت منذ القرن الثامن عشر أو ما قبله أيضًا قاعدة هذه الثورة الكبيرة. لكنّ المضمون والأسلوب سرعان ما أخذا بالتغيّر، لا بسبب العودة إلى الصرامة الرياضية التي أخذ بها غاوس ورفاقه فقط، بل وكذلك بسبب إدخال كائناتٍ رياضيّةٍ جديدة (الأعداد العقدية وما فوق العقدية، المصفوفات، المتجّهات من n بعد، التعويضات،...) تختلف عن الكائنات الرياضيّة الكلاسيكيّة في كونها لا تحتمل تمثيلاً حسيّاً وأبسط هذه الكائنات الرياضيّة وأوّلها هي الأعداد العقديّة.

لم ينقطع أبدًا اندفاع الأفكار الجديدة في كافّة الفروع التقليديّة للرياضيات (الحساب والهندسة والجبر والتحليل) خلال القرن التاسع عشر، والذي نراه من منظورنا اليوم كفترةٍ انتقاليةٍ بين الرياضيات التقليدية والرياضيات الحديثة. وهي فترة شديدة الخصوبة فمن جهةٍ من حيث اكتشاف المفاهيم التي ستغدو هي نفسها الأساس لفروعٍ جديدةٍ كليّاً في الرياضيات (نظرية الزمر، الطبولوجيا، الفضاءات التابعيّة، الخ) ومن جهةٍ أخرى من حيث تعميق المفاهيم القديمة بحيث تسمح بالأخذ بعين الاعتبار على نحوٍ أفضل لمضامين الموضوعات.

وشيئًا فشيئًا بدأت تتكشّف فكرةٌ عامّة سوف تتّضح بدقّة في القرن العشرين وهي فكرة البنية. وسيكون الأخذ بها نتيجةً للتحقّق من

كون ما هو أساسيٌّ في فرعٍ أو آخر من فروع الرياضيات هو العلاقات بين الكائنات الرياضيّة التي تصف هذا الفرع وليس الكائنات ذاتها. ففي فرعين قد يبدوان بعيدين كلّ البعد أحدهما عن الآخر يمكن أن يُعبَّر عن هذه العلاقات بطريقةٍ واحدة فمنظومة هذه العلاقات ونتائجها هي بنية واحدة مولّدة لهذين الفرعين.

لا بدّ من الإشارة إلى أنّ ظهور هذه الكائنات والفروع الجديدة من الرياضيات كانت في معظم الأحوال تلبيةً لحاجةٍ في حلّ مسائل عالقة من الرياضيات التقليدية وليس لمجرّد نزعةٍ غير مبرّرة نحو التجريد. ومن جهةٍ أخرى فإنّ كون البنية ذاتها قد توجد في فرعين أو أكثر من فروع الرياضيات هو أمرٌ سينبّه أكثر فأكثر إلى الوحدة العميقة للفروع المختلفة لها الأمر الذي صار أكثر وضوحًا بالنسبة لنا اليوم.

من بين الروائع الكثيرة التي ظهرت في الرياضيات خلال القرن التاسع عشر، لنحاول أن نطّلع عن قربٍ أكثر على تطوّرين هامّين هما الهندسات اللاإقليدية ونظرية المجموعات.

نشأت الهندسات اللاإقليدية في الأساس عن محاولاتٍ استمرّت قرابة ألفي عام لبرهان الموضوعة الخامسة لإقليدس اعتمادًا على الموضوعات الأربع الأولى.

تنصّ الموضوعة الخامسة في الهندسة الإقليدية على أنّه يمكن من نقطةٍ خارج مستقيم معلوم أن نرسمَ مستقيمًا واحدًا فقط موازيًا لهذا

نشأت فكرة البنية مع ظهور نظرية الزمر التي أرسى أسسها شابٌّ فرنسيّ يدعى إيفارست غالوا كان عمره أحد وعشرين عامًا وسجّل أبحاثه بسرعةٍ في الليلة التي سبقت مقتله في مبارزة. كان غالوا يتابع أعمالاً بدأها لاغرانج من أجل تفسير عدم وجود صيغةِ حلٍّ عام للمعادلات التي تزيد درجتها عن الدرجة الرابعة. وقد توّصل إلى ذلك باستخدام كائناتٍ رياضية جديدة في غاية التجريد تدعى التعويضات. أطلق غالوا على مجموعة التعويضات التي استخدمها اسم "زمرة" بعد ذلك تبيّن وجود بنى كثيرة تشبه هذه الزمرة من حيث التكوين وأبسطها مجموعة الأعداد الصحيحة بعد أن نعرّف عليها عمليّة الجمع. فلكي تشكّل مجموعة من العناصر مع عمليّة معرّفة عليها زمرةً يكفي تحقق الشروط التالية:

١. أن ينتمي تشكيل كل عنصرين من المجموعة وفق العملية المعنية إلى المجموعة نفسها.

٢. أن تكون العملية تجميعية أي أن يكون ترتيب تشكيل أيّ ثلاثة عناصر من المجموعة وفق العملية إيّاها غير مهمّ.

٣. أن يوجد عنصر حيادي في المجموعة وهو عنصر يعطي تشكيله مع أي عنصر آخر من المجموعة هذا العنصر الآخر نفسه.

٤. أن يكون لكلّ عنصرٍ عنصرًا نظيرًا بحيث يكون تشكيل العنصر ونظيره هو الحيادي.

كانت زمرة غالوا تحقّق هذه الشروط التي عُمّمت فيما بعد. وفضلاً عن الزمر نشأت بنىً أخرى كالحلقة والحقل ونصف الزمرة...

أوضح هذا التطوّر حقيقةً عميقةً في الرياضيات: إنّ العلاقات بين الكائنات الرياضية، والتي تتكرّر هي هي في البنى المتشابهة (الإيزومورفية)، هي الأهمّ وليس الكائنات بحدّ ذاتها. هنا نكتشف بنيةً تحتيةً أو ورائيةً في الرياضيات، كما نلمح عاملاً موّحدًا ينقلنا بين فروع الرياضيات المختلفة. فنظرية الزمر التي استُخدمت من قِبَلِ مبدعها غالوا لبرهان أن المعادلات التي تزيد درجتها عن الأربعة لا تقبل صيغة حل عام. استُخدمت أيضًا من أجل حلّ مسائل كانت عالقة في الهندسة المستوية.

المستقيم. وقد نستغرب اليوم لماذا رفض الكثير من الرياضيين خلال التاريخ قبول هذه المسلّمة وحاولوا إيجاد برهانٍ لها. لقد حدث ذلك على كلّ حال، إلى أن جاء رياضيٌّ روسيّ يدعى نيقولا لوباتشيفسكي N. Lobatchevski، ففرض أنّه يمكن أن نرسم من نقطةٍ ما مستقيمين موازيين لمستقيمٍ واحد مُعطى. وبَنى هندسةً جديدةً كليّاً ابتداءً من الموضوعات الأربع القديمة لإقليدس وهذه الموضوعة الجديدة. وبطبيعة الحال اتُّهم لوباتشفسكي مثل الكثيرين من سابقي عصرهم بالجنون واللوثة العقلية ولم يؤخذ بهندسته إلا فيما بعد والغريب هو أن الأوربيين قد اعترفوا به وبنبوغه قبل الروس أنفسهم وهذا مفهوم أيضًا إذ "*ليس لنبيٍّ كرامة في وطنه*".

ثمّ جاء عالمٌ آخر يدعى ريمان B. Riemann، فكان حظُّه أفضل بكثيرٍ من حظّ لوباتشفسكي بما أنّه من تلاميذ جاوس. وضع ريمان هندسةً جديدةً أخرى أكثر ثوريّةً من هندسة لوباتشفسكي وأكثر كمالاً وأكثر تعقيدًا منها في الوقت نفسه، وهذا أحد الأسباب التي ستجعلنا نتجنّب الحديث عنها. لا بدّ من الإشارة إلى أنّ لوباتشفسكي كان قد وقف في منتصف الطريق وعجز عن إثبات عدم التناقض في هندسته لكنّ هذا الموضوع بالذات يمنحنا فرصةً لمتابعة المسار الذي اتّخذه تطوّر الرياضيات منذ ذلك الوقت. إنّما علينا قبل ذلك أن نشرح باختصار ما نعنيه بقولنا "عدم تناقض". لنفرض أنّ عالِمًا (يمكن أن يكون تلميذًا لم يتجاوز الخامسة عشرة من عمره) برهن يومًا على أن مجموع زوايا المثلث لا يساوي زاويتين قائمتين. (في الهندسة الإقليدية

طبعًا) فهذا يعني أنّ هذه الهندسة متناقضة لأننا استطعنا في وقتٍ واحد أن نبرهن على نظريةٍ وعلى نقيضها. وهكذا فإنّ هندسة لوباتشفسكي كانت تبدو صعبة الفهم بسبب طرحها مفاهيم خارجة عن المألوف أو على نحوٍ أدقّ بسبب تمخّضها عن نتائج لا يمكن تطبيقها في الواقع الفيزيائي المعتاد. لكنّ السؤال الأهمّ كان في تناقضها أو عدم تناقضها الداخلي.

كان لوباتشفسكي يعرف بالحدس أنّ هندسته صحيحةٌ تمامًا عندما تُطبَّقُ على سطحٍ ذو تقوّسٍ معيّن ولنقل من أجل التبسيط أنّه يشبه سطح سرج الحصان مع فارقٍ واحد وهو أنّه يجب أن يكون لا نهائيّاً. ولمّا كان مثل هذا المستوي غير موجود في الطبيعة، بل لمّا كنّا غير قادرين على رؤية مثل هذا المستوي في الطبيعة على نحوٍ أدقّ، فإنّ إمكانيّة اختبار صلاحية (عدم تناقض) الهندسة الجديدة لم يكن ممكنًا. لا شكّ أنّ الخطأ الذي وقع فيه لوباتشيفسكي، كما نراه اليوم وكما لم يكن ممكنًا النظر إليه في وقته، هو أنّه فكّر في إمكانيّة إثبات عدم تناقض هندسته بطريقة تجريبيّة أي فيزيائيّة. وهو معذورٌ في ارتكاب هذا الخطأ لأنّ البشريّة كلّها ظلّت طوال ألفي عام تعتبر الهندسة الإقليدية صحيحةً لأنها لا تناقض الواقع. ومع ذلك فقد كان هذا الخطأ مصدرًا لفكرةٍ عظيمة الأهمية سوف تلعب دورًا كبيرًا فيما بعد. كان هذا الموقف هو العامل، أو أحد العوامل على الأقلّ، التي نبّهتِ الرياضيّين إلى أنّ اعتقادنا بصحّة الهندسة الإقليدية ينتج فقط عن توافقها مع الواقع الفيزيائيّ دون أن يكونَ هناك أيّ برهانٍ لعدم التناقض هذا والذي سيسمّيه هيلبرت D. Hilbert

الاتّساق. ولن يلبث غودل K. Gdel، في مطلع القرن العشرين أن يبرهن أنّ إثبات الاتّساق في الهندسة الإقليديّة أو في أيّة بنيةٍ موضوعاتيّةٍ مشابهة أمرٌ مستحيل، إلا باستخدام بنيةٍ أخرى خارجية.

بدلاً من إثبات عدم تناقض هندسة لوباتشفسكي قام عالمٌ ألمانيٌ آخر هو فيلكس كلاين F. Klein، بإنشاء تناظرٍ بين هندسة لوباتشفسكي وسلفها هندسة أقليدس بحيث أثبت بالتالي أنّ تناقض هندسة لوباتشفسكي سيعني تناقض هندسة أقليدس والعكس بالعكس.

كرّست هذه الأعمال، مع أعمالٍ أخرى كانت تجري في الوقت نفسه، مفهوم البنية الموضوعاتية. لقد كانت الهندسة الإقليديّة طوال ألفي عام البنية الموضوعاتيّة الوحيدة وها هي بنيةٌ أخرى مشابهة توجد الآن. وكان السؤال الكبير المقبل يتعلّق فيما إذا كان يمكن صياغة مجمل فروع الرياضيات وفق هذه الطريقة. وهنا جاءت في وقتها نظريّة المجموعات، أو قل لغة المجموعات.

الرياضيات: من مجموعة نظريّاتٍ إلى نظريّة المجموعات

كان القرن التاسع عشر قرن الاكتشافات الكبيرة والتجريد المتزايد لكنّه كان في الوقت نفسه زمن طرح التساؤلات. فعمليّات التكامل، أي جمع عدد لا نهائيّ من مقادير لامتناهيةٍ في الصغر للحصول على مقدارٍ محدّد كانت لا تزال أمرًا يثير التساؤل. ولعلّ فكرة اللانهاية نفسها كانت المثير الرئيس لقلق الرياضيّين.

عالج جورج كانتور G. Cantor، موضوع اللانهاية بطريقةٍ مبتكرة مبدعًا من أجل ذلك فكرة المجموعات ولا بأس أن نعطي ههنا فكرةً موجزةً عن عمل كانتور.

نعلم جميعًا أن ليس هناك نهاية للأعداد الطبيعيّة، وهي الأعداد التي نستخدمها في العدّ (1,2,3,4,...) كما نعلم أنّ الأعداد الصحيحة، وهي الأعداد الطبيعية نفسها مضافًا إليها نظائرها السالبة، والصفر (...,-3,-2,-1,0,+1,+2,...) هي أعداد لا نهاية لعددها أيضًا.

من حيث التعريف، تشبه فكرة المجموعة فكرة النقطة أو المستقيم. فهي مفهوم أوليّ ليس ضرورياً أن نعرّفه. نقول ببساطة أنّنا نستطيع أن نطلق اسم مجموعة على أيّة أشياء نجمعها معًا. فالأعداد الطبيعية تشكّل مجموعةً. والأعداد الطبيعية الزوجية تشكّل مجموعة أخرى (سنسمّيها فيما بعد مجموعةً جزئيّةً من مجموعة الأعداد الطبيعية) ومجموعة الأعداد الصحيحة تشكّل مجموعة أخرى (تحوي مجموعة الأعداد الطبيعية)... وهناك بطبيعة الحال مجموعات منتهية كمجموعة صفحات هذا الكتاب، وأخرى غير منتهية كالمجموعات المذكورة آنفًا...

إذا كان لدينا مجموعتان منتهيتان، فإنّنا نسمّيهما مجموعتان متكافئتان، أو نقول إنّ لهما نفس القدر، إذا كان عدد "العناصر" التي في الأولى مساوٍ لعددها في الثانية وذلك بغضّ النظر عن طبيعة أو ماهيّة هذه العناصر. ويمكن سحب هذا التعريف على المجموعات غير المنتهية أيضًا. ولكن شيئًا جديدًا يظهر هنا: للّانهاية مراتب مختلفة:

يمكن أن نقرن عناصر مجموعة الأعداد الطبيعية بعناصر مجموعة الأعداد الصحيحة وذلك كما يلي:

1:0, 2:-1, 3:1, 4:-2, 5:2, ...

وهكذا فإنّ عدد الأعداد الصحيحة لن ينتهي وكذلك عدد الأعداد الطبيعية وهذا يعني أنّ للمجموعتين القدر نفسه أي أنّ فيهما نفس العدد من العناصر، وهذا لا يناقض كون إحدى المجموعتين محتواة في الأخرى!

أثبت كانتور فيما بعد أنّ مجموعة الأعداد العادية (التي تحوي الكسور إضافةً إلى الأعداد الصحيحة) لها نفس القدر أيضًا. أما مجموعة الأعداد الحقيقية (التي تحوي الأعداد التي تسمّى الصمّاء مثل e و $\sqrt{2}$ و π، الخ..) فعناصرها أكثر عددًا من تلك المجموعات الثلاث أي أنّ هناك مراتب مختلفة من اللانهاية. وثمّة مجموعاتٍ أخرى عدد عناصرها اللانهائي أكبر من عدد عناصر هذه المجموعة الأخيرة... وأبدع كانتور حسابًا جديدًا لإجراء الحسابات على هذه المجموعات غير المنتهية. في السابع من الشهر الأخير من عام 1873 كتب كانتور رسالةً لصديقه ديدكند R. Dedekind، يخبره فيها بنتائج عمله ويعتبر هذا التاريخ ميلاد نظريّة المجموعات.

لكنّ فكرة المجموعات تطوّرت باتّجاهٍ آخر ولا سيّما على يد ديدكند الذي نشر في العام 1888 كتابًا وضع فيه لغةً دقيقة وموحّدة في كلّ فروع الرياضيات وهي لغةٌ أبجديتها المجموعة والعنصر والانتماء والتقاطع والاجتماع (أو الاتّحاد) الخ... وهذه الأبجدية يتعلّمها اليوم طلبة المدارس منذ الصفّ الأوّل في المرحلة الإعدادية. وهي نتيجة باهرة بالنسبة لكتاب ديدكند الذي لم يُعطَ حقَّ قدره إلا بعد حين. هكذا دخلت لغة المجموعات إلى جميع فروع الرياضيات التي أُعيد العمل على صياغتها من

جديد ففي الهندسة المستوية مثلاً صرنا نقول إنّ النقطة a مثلاً "تنتمي" (أو لا تنتمي) إلى المستقيم L (بدل قولنا في السابق إنّ a تقع على المستقيم L) الذي هو في الواقع "مجموعة" غير منتهية من النقاط...

أخيرًا وليس آخرًا

أخيرًا، مع أنّ النظريّة التي سنتحدّث عنها صار عمرها يقارب ثلاثة أرباع القرن، وليس آخرًا لأنّ هذه النظرية تقول إن ليس ثمّة آخِرا لكنّنا قبل الوصول إلى نظريّة غودل نستعرض بسرعةٍ الفرع من الرياضيات الذي أنجبها أي المنطق الرمزي الذي أرسى قواعده الفيلسوف والرياضي الأنكليزي برتراند راسل B. Russel.

ما أقدّره في راسل، أكثر من إنجازاته الرياضية البالغة الأهميّة، أنّه كان سليل أسرةٍ عريقةٍ من اللوردات، وذات صلةٍ بالأسرة المالكة في بريطانيا. لكنّه فضّل أن يعيش من عرق جبينه وتنازل عن ميراثه ومكانته الطبقيّة، ليقودَ نضالاً من أجل السلام وضدّ مشاركة بريطانيا في الحرب العالمية الأولى، الأمر الذي أودى به إلى السجن، وفيما بعد نضالاً مناهضًا لسباق التسلّح الذي شهدته الخمسينيات والستينيات من القرن العشرين، متحمّلاً في سبيل ذلك حرمانه من التعليم في الجامعات البريطانية فراح يدرّس في الولايات المتّحدة التي لم يتوقّف فيها عن نشاطاته السياسية الداعية للسلام الأمر الذي أدّى إلى تجدّد تعرّضه للمتاعب. كان راسل من أوائل الّذين دَعَوا إلى إقامةِ حكومةٍ عالميّة. وإلى مجتمعٍ علمانيٍّ أمميّ. إنّ العولمة التي نرى مدّها اليوم هي صورةٌ مشوّهةٌ لبعض ما كان يدعو إليه الفيلسوف الإنسان برتراند راسل.

على غرار علماء عديدين تقدّموه، مثل جورج بول G. Bool وفريج F. L. G. Frege وده مورغان A. De Morgan وبيانو G. Peano .. أراد راسل إخضاع الرياضيات للمنطق البحت. ولقد قام بنشر عمله على مرحلتين: في كتابٍ وضع عنوانه "مبادئ الرياضيات" باللغة الأنكليزية Principles of mathematics عام 1903 ثمّ أكمله في كتابٍ آخر، بعد نحو عشرة أعوام، أعطاه نفس العنوان إنّما في اللغة اللاتينية، Principia Mathematica وشاركه في وضعه أستاذه في كامبردج آلفرد نورث وايتهد A. N. Whitehead. قد لا يكون بعيدًا عن الصحّة أن نقول: إنّ المنطق الرمزيّ هو البنية الرياضية التي تصف المنطق الذي تقوم عليه البنى المختلفة في الرياضيات. وفي ذلك مفارقة جميلة ومدهشة. فلا نستبعد إذًا أن تؤدّي مثل هذه البنية إلى أكثر نظريات الرياضيات غرابةً.

في العام 1931 برهن كورت غودل البالغ في ذلك الوقت الخامسة والعشرين من عمره، وببرهانٍ يعتبر بحدّ ذاته آيةً في الإبداع الرياضي، على نظريةٍ في الرياضيات تحاكي، من حيث المضمون الفلسفي، مبدأ الريبة في نظرية ميكانيك الكم في الفيزياء. لقد برهن غودل ببساطة على أنّه، ضمن أيّة بنية موضوعاتية، تبقى هناك قضايا لا يمكن البرهان على صحّتها أو خطئها. وإذا جعلنا من هذه القضايا موضوعات جديدة أضفناها إلى الموضوعات الأصلية فإنّ قضايا أخرى جديدة ستظهر ضمن هذه البنية الموضوعاتية بحيث لا يمكن أن نبرهن، من جديد على صحّتها أو خطئها.

يعبّر ديفيد برغاميني عن هذا بقوله: *لقد برهن غودل أنّنا في أيّة بنيةٍ رياضية لن نعرف أبدًا كلّ ما يمكن معرفته، وبمعنًى آخر فإنّ الصيد في محيط الرياضيات لن ينتهي.*

لا شكّ أنّ نظرية عدم الكمال لغودل هذه كانت مصدر إحباطٍ للكثير من الرياضيين التقليديين الذين كانوا يحلمون ببناءٍ رياضيٍّ كامل ونهائيّ. بقدر ما كانت مصدر فتح آفاقٍ جديدة لأصحاب الفكر المنطلق الذين ما كانوا ليحتملوا أن تصبح الرياضيات بناءً جامدًا لا يتغيّر.

ما زالت الرياضيات تشقّ طريقها. إنّما، مع الأسف، في معالجة قضايا تفصيليّة ومغرقة في التخصّص بحيث يبدو أنّ الرياضيات تمرّ اليوم في أزمةٍ مشابهةٍ لأزمة نهاية القرن الثامن عشر. ولعلّ ذلك مدعاة تخمينٍ بأنّ ثورةً جديدةً تنتظر الرياضيات. نترك الكلام عن هذا الموضوع لفرصةٍ أخرى. لنعودَ، وقد تحدّثنا بإيجازٍ شديدٍ عن تاريخ الرياضيات، إلى محاولة التعرّف في الفصلين القادمين على ماهيّتها وإلى محاولة الإجابة على السؤال الكبير: "لماذا الرياضيات".

إنّ عناصر البنية التي تسمّى المنطق الرمزي هي عبارات نسمّيها قضايا والقضية هي أي عبارة في اللغة يمكن الحكم عليها حتمًا بالصحّة أو الخطأ. فنظريات الهندسة الإقليدية هي مثال واضح عن القضايا. وهكذا فبدلاً من كتابة القضية في كلّ مرّة نستخدم للدلالة عليها حرفًا من أحرف اللغة.

لكلّ قضيّة p نفي نرمز له بـــ p~ فإذا كانت p صحيحة فإنّ نفيها يكون قضيّةً خاطئة والعكس بالعكس. يُعبّر عن ذلك في المنطق الرمزيّ كما يلي: $p \vee \sim p$ (وتُقرأ إمّا القضية p أو القضية نفي p) أيّ أنّ إحدى القضيتين صحيحة والثانية إذًا خاطئة.

هذه الحقيقة ($p \vee \sim p$) التي باتت تنتمي إلى المنطق الرمزيّ هي القاعدة التي نستخدمها في كلّ مرّة نبرهن فيها إحدى النظريات بطريقة نقض الفرض المشهورة. وعلى العموم فإنّ جميع قواعد المنطق التي نستخدمها في المحاكمات الرياضية تتلخّص في نظرية المنطق الرمزي بقواعد تُكتَبُ بطرق مشابهة لما سبق. وذلك باستخدام الأحرف للدلالة على القضايا وباستخدام عمليّات تُعرَّفُ على هذه القضايا كالنفي الذي رأيناه والفصل ($\vee$) والوصل ($\wedge$)...

إنّ المنطق الرمزي الذي أبدعه راسل ما هو في الجوهر غير التعبير الرياضي للمنطق الثنائي (نعم أو لا، صح أو خطأ، خير أو شرّ...) الذي فُطر عليه البشر ويقودنا هذا إلى ملاحظة هامّة: هل يمكن أن نبدع (أو أن نكتشف) رياضيات جديدة تقوم على أنواع أخرى من المنطق الثلاثي أو الرباعي مثلاً؟!

عالمٌ رائع

إنّهم يبنون بالحجارة ولا يرون انّ كلّ حركةٍ من حركاتهم لوضع الحجر في الملاط يرافقها ظلّ حركة لوضع ظلّ حجرٍ في ظلّ ملاط إنّهم لا يدركون أن الأهميّة هي لبناء الظلّ.

جان جيونو

إن الرياضيّات تصل إلى مملكة بلغت من التعقيد حدًا يجعل صحّة نقطة انطلاقٍ ما أو عدم صحتها غير ذي اهمية ويستطيع الرياضيّ وفق هذه القاعدة أن يفرض بلا تردّد ان القمر مصنوع من جبنة خضراء ثم يلجأ إلى مناقشةٍ مقنعة مستخدمًا عددًا من نقاط الانطلاق الأخرى حتى يصل إلى نتيجة يستحثّ فيها ملاحي الفضاء على حمل البسكويت معهم.

ديفيد برغاميني

مشهورةٌ قصّة دان أندرسون D. Anderson عن الملك الّذي أراد أن يصنع لنفسه ثيابًا لا نظير لها... وهي مليئةٌ بالعبرة أيضًا فلا بأس من تلخيصها هنا:

يُروى أنّ ملكًا أراد أن يصنع لنفسه ملابسَ فاخرة جديدة. وهي ضرورةٌ ملكيّة لا بدّ منها. فمن المعروف منذ القديم أنّ المسؤولين على

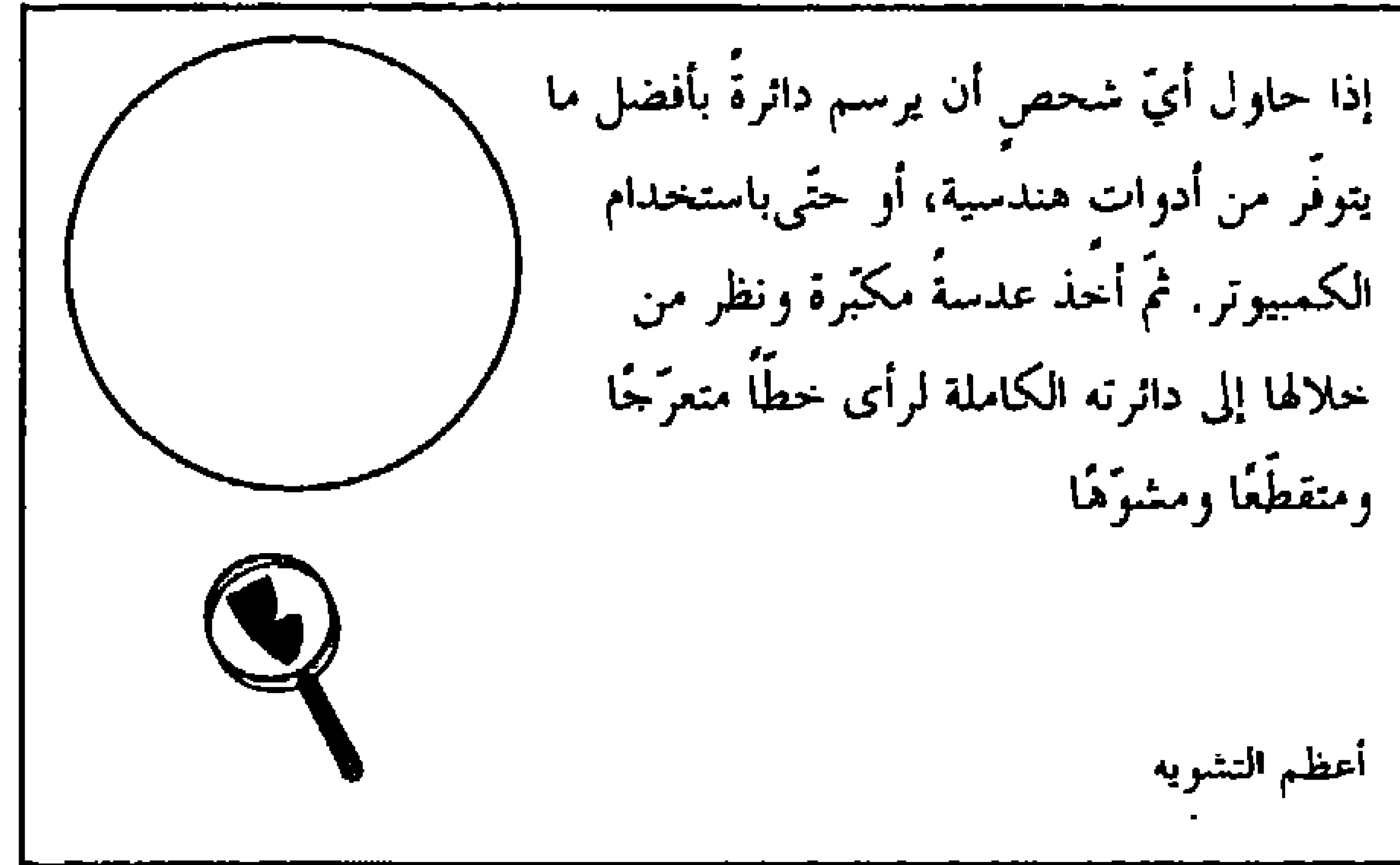
اختلاف أنواعهم لا يستطيعون القيام بمهامهم الجسيمة في خدمة شعوبهم دون جميع أنواع المظاهر والبذخ. استدعى جلالته من أجل ذلك نسّاجَين هما أعظمُ نسّاجي ذلك الزمان لكنَّ هذين الأخيرين استغلا طيبة الملك وأقنعاه بأنّ الملابس التي يصنعانها ستُنسَجُ من خيوطٍ وأقمشةٍ ذات طبيعةٍ سحريّة بحيث لا يستطيع أن يراها إلا من كان محبّاً ومخلصًا له. وهكذا أخذ النسَّاجان أموالاً كثيرة منه ثمنًا لهذه الأقمشة غير الموجودة وأجرةً لخياطتها التي لم تتمّ... وبما أنّهما قد عرفا كيف يتدبّران أمرهما بحيث ينشران إشاعةً مفادها أنّ على الجميع أن يهنّئوا الملك على ملابسه الجديدة وإلا اتُّهموا بعدم إخلاصهم، فقد قام الملك بجولته وهتف الجميع له وللملابسه الرائعة وهو عارٍ!!

أرسم لي دائرة وخذ ما تريد!!

إنّ مادّة البناء الرياضيّ لَتشبه كثيرًا بل إنّها تشبه بالضبط مادّة هذه الأقمشة والخيوط. فهي بكلٍّ بساطةٍ غير موجودة إلا في أذهاننا لكنّ الفرق الكبير هو أنّنا قد استطعنا أن ننسج منها ملابس في غاية الروعة!! ولعلّ هذا ما حذا ببرتراند راسل أن يعرِّف الرياضيّات بأنّها *"الموضوع الّذي لا نعرف فيه عمّا نتحدّث ولا نعرف إن كان ما نقوله صحيحًا أم لا"*. يبدو هذا التعريف مبعث شكٍّ في الرياضيّات بجملتها لا سيّما حين يردُ على لسانِ مؤسِّس المنطقِ الرمزيّ نفسه. لكنّه صحيحٌ جدًا مع ذلك:

عندما نقول، في الرياضيّات، "دائرة" فنحن لا نقصد بالتأكيد عجلة السيارة ولا قرص الشمس ولا قالب الحلوى ولا أي شكلٍ معروفٍ آخر ونحن لا نعرف في الحقيقة عمّا نتحدّث. فالدائرة في الرياضيّات

تعرّفُ بدقةٍ لا لبس فيها: مجموعة النقاط الواقعة في مستوٍ واحد والتي تبعد عن نقطة ثابتة ما بعدًا متساويًا. ولكن من ذا يعرف ما معنى كلمة مستوي؟ وما معنى كلمة نقطة، ومجموعة فإذا كانت الدائرة هي "مجموعة النقاط" فإنَّ من المهمّ جداً أن نعلم أن النقطة هي شيء غير موجود عملياً أو على الأقلّ غير ملموس، أي غير موجود في عالم الحسّ. لأنها بمجرّد أن توجد في هذا العالم لا تعود تُحسبُ نقطةً بالمعنى الرياضيّ. وعليه فإنّ الدائرة أيضًا، بالمعنى الرياضيّ للكلمة، هي شيءٌ غير موجود إلا في أذهان الرياضيّين. وبما أنّ ما قلناه عن الدائرة ينطبق بطبيعة الحال على المثلّث والمربّع وعلى الكرة والهرم والموشور... فإنّ الهندسة برمّتها محض أفكار وخيال!



وما قلناه عن الكائنات الهندسيّة ينطبق أيضًا على الكائنات الرياضيّة المختلفة. فما هو العدد في الواقع؟ إنه لا يزيد عن تجريدٍ قمنا به تجاوزًا. فهناك خمس عنزات وستُّ دجاجات لكن ليس هناك "في الواقع" خمسةٌ مجرّدة نفهم أنّ جمع شجرتين مع ثلاث شجراتٍ يعطي خمس شجرات لكن ما الّذي نعنيه بـ $2+3=5$؟ وما أدرانا بأنّ الـ 2 لا تمثّل شجرتين بينما

تمثّل الـ 3 ثلاثة فؤوس فعلى 5 ماذا سنحصل؟! إنّ الأعداد التي نسمّيها طبيعيةً ليست أكثر طبيعيّةً في الواقع من الأعداد التي نسمّيها وهميّة أو عقديّة. ويعرف جميع الرياضيّين اليوم أنّ هذه التسميات (طبيعيّة، صحيحة،...) هي مجرّد اصطلاحاتٍ لم تعد تحتمل السبب الّذي جعلنا نطلقها. والحال فإنّ جميع العمليّات الحسابيّة التي نقوم بها على الأعداد لا تعدو كونها لعبةً منطقيةً اصطلاحية. والنتيجة التي نخلص إليها إذًا هي التالية: ليست الرياضيّات غير مجرّد لعبة ألفاظٍ ورموز ويذكّرني هذا بتعريف آخر للرياضيّات وهو الّذي وضعه أحد أعظم رياضيّي القرن العشرين وهو الألماني هيلبرت: *"الرياضيّات لعبةٌ نلعبُها وفق قواعد بسيطة مستخدمين لذلك رموزًا ومصطلحات ليس لها، بحدّ ذاتها، أيّ أهميّةٍ خاصّة"*.

قواعد اللعبة

إذ أردنا الأخذ بتعريف هيلبرت هذا فعلينا أن نعدّله قليلاً: الرياضيّات في الواقع مجموعةٌ كبيرةٌ من الألعاب. إنّ كلّ فرعٍ من فروع الرياضيّات هو لعبةٌ منطقيّةٌ مختلفةٌ عن الأخرى لكنّ هذه الألعاب جميعها ترتبط ببعضها بعضًا بحيث يستطيع اللاعب في إحداها أن يحقّق تقدّمًا في لعبته بالاستعانة بلعبةٍ أخرى وهو أمرٌ يزيد بلا شكّ من متعة هذه الألعاب وتشويقها. ولكن لنتحدّث قليلاً عن طبيعة نظريّةٍ رياضيّةٍ أو فرعٍ ما من فروع الرياضيّات. أي عن لعبةٍ من هذه الألعاب.

ما تزال الهندسة الإقليديّة خير مثال. فهي أكثر النظريّات الرياضيّة بساطةً ومعرفةً من قبل الجميع. ولقد سبق أن تحدّثنا عن بناء الهندسة الإقليديّة في مكانٍ آخر من هذا الكتاب. يُمكن النظر إلى الموضوعات

في الهندسة الإقليديّة على أنّها قواعد اللعبة. ومع أنّ هذه الموضوعات قد استُمدَّت من الواقع الفيزيائي، ذلك أنّ الكائنات الهندسيّة الإقليديّة قد جُرِّدت بالأصل من أشياء واقعية. إلا أنّ معالجة هذه الكائنات ضمن بناء الهندسة الإقليديّة وبرهان النظريّات المختلفة التي تشكّل العلاقات بين هذه الكائنات وخواصها... يتمّ على نحوٍ كاملٍ بشكلٍ مجرّدٍ عن أيّ علاقةٍ لها بالواقع الملموس. هذا ما اتّضح على نحوٍ كبير عندما عُدِّلت قواعد اللعبة. حين غيّر لوباتشفسكي الموضوعة الخامسة في الهندسة الإقليديّة فحصل على هندسةٍ أخرى، على لعبةٍ أخرى لم يستطع أن يمثّلها في الواقع لكنّها بقيت غير متناقضة في ذاتها. لا بدّ أن نذكّر هنا بأنّ الشيء الجديد مع لوباتشفسكي هو أنّه ليس ضرورياً للموضوعات أن تكون منطقيةً أو أن توافق الحسّ السليم.

لكنّي أفضّل التشبيه المعروف الآخر للرياضيّات بمجموعةٍ من الأبنية. لا لأنّي أرى استخفافًا بالألعاب، فأنا في الحقيقة أقدّر اللعب أكثر من البناء! لكنّ هذا التشبيه بالبناء يقودنا إلى تشبيهٍ آخر، فبناء الرياضيّات المجرّد، المبنيّ من مادّةٍ لا وجود لها، على أسسٍ (موضوعاتٍ) غير مقبولةٍ منطقياً دومًا بالضرورة، يلقي بظلّه الكبير على حياتنا اليومية ويجد تطبيقاته في كلّ مجالات نشاطنا.

إنّ الرياضيّات لَتقع في العمق في أساس كلّ الاختراعات التي ننعم بها اليوم بدءًا من هذه لوحة المفاتيح التي أستخدمها الآن والجهاز الذي تتصل به وانتهاءً بالمصباح الكهربائيّ الذي يساعدك في قراءة هذا الكتاب ليلاً. لست هنا بصدد الحديث عن المجالات غير المتوقّعة لتطبيق

الرياضيّات في الفيزياء والتكنولوجيا والصناعة والتجارة والطب والبيولوجيا والنقل والاتّصالات بكلّ أشكالها... أستطيع أن أحيل القارئ إلى فصلٍ يحمل عنوان "دور الرياضيّات الحديثة في العلم المعاصر"، من كتابٍ عنوانه "ما هو الكون" للأستاذ فايز فوق العادة رئيس الجمعية الكونية السورية. أمّا من جهتي فأريد الحديث عن مشكلةٍ كبرى تظهر هنا وهي سوء تفاهمٍ ما يزال محتدمًا منذ زمان إقليدس بين التطبيقيين الذين يصل البعض منهم حدًّ أن يكونوا نفعيّين، وبين النظريّين ويطيب لي أن أسمّيهم الفنّانين، والذين يصل بعضهم حدّ أن يكونوا مثاليّين طوباويّين.

الفنّ من أجل الفنّ، أو الرياضيّات من أجل الرياضيّات

يبدي جان ديودونّيه J. Dieudonné، أحد كبار الرياضيّين الفرنسيّين المعاصرين، وواحدٌ من الخمسة المؤسّسين لمجموعة بورباكي، ملاحظةً جديرةً بالاهتمام: هناك بالطبع فيزياء تطبيقيّة وكيمياء تطبيقيّة... وهناك بالمقابل فيزياء أساسيّة وكيمياء أساسيّة وكذا الأمر بالنسبة لبقيّة العلوم. أما في الرياضيّات فيجري الحديث عن رياضيّات تطبيقيّة ولكن لا مقابل رياضيّات أساسيّة بل بالأحرى مقابل رياضيّات "بحتة" (كما نقول في العربية أما الأصل الفرنسي، والإنكليزي، للكلمة فهو "نقيّة" mathématiques pures) ويفسّر صاحبنا ذلك كما يلي: لو حلّلنا الأمر بعمق لوجدنا أنّه في الرياضيّات، خلافًا للعلوم الأخرى، ثمّة مساران فكريّان مختلفان تمامًا فلا وجود في الواقع لرياضيّات بحتة وأخرى تطبيقيّة الأصحّ أنّ هناك رياضيّات، وتطبيق للرياضيّات. أمّا الرياضيّات التطبيقيّة فما هي غيرُ اصطلاحٍ مجازيّ لا يعبّر عن مضمون ما يشير إليه. على هذا الأساس

سوف نفهم في كلّ مرّةٍ تردُ فيها عبارة "رياضيّات تطبيقيّة"، في هذا الكتاب على الأقلّ، أنّ المقصود هو تطبيق الرياضيّات في مختلف المجالات والعلوم. أمّا الرياضيّات نفسها فنعتبرها ضربٌ من الفنِّ الفكريِّ الرفيع الذي يطوِّره أصحابه بدافع واحد، هو تنمية بنائِه أكثر فأكثر، بل بتحديدٍ أكبر، بهدف إكمال هذا البناء من ناحيةٍ ترسيخه وتثبيته من جهة. ومن جهةٍ أخرى، من أجل جعله أكثر جمالاً وكمالاً وتناسقًا، وسواء كان لذلك فائدة عمليّة أم لم يكن. عندما يطرح الرياضيّون السؤال حول وجود صيغةٍ عامّة لحلّ معادلات الدرجة الرابعة وينتهي بهم الأمر، على طريق معرفة الجواب، إلى نظريّة الزمر فإنّهم لا يفكّرون مطلقًا بالنتائج التي يمكن أن تُطبّق عليها هذه الأعمال في الفيزياء أو التكنولوجيا أو العلوم الأخرى. ومع ذلك فإنّنا لا نستطيع أن نفصل أبداً بين الرياضيّات البحتة والرياضيّات التطبيقيَّة. فهذا العلم الفنّ، إنما يبدأ دوماً أفكاراً مجرَّدة وبنىً غريبة خاصَّة تؤلِّف عوالِمَ قائمَةً بذاتها، تبدو بعيدة جدّاً عن عالم الواقع، لكنّ الفيزيائيِّين والتقانيِّين والاقتصاديّين والبيولوجيّين... والعلماء الآخرين من مختلف الفروع، سرعان ما يجدون حلولاً لمشاكلهم، في هذه العوالم المجرَّدة التي غالباً ما يكون واضعوها قد أشادوها لأغراض مستقلّة عن أيِّ وظيفة عمليَّة... ومع ذلك يشدِّد الرياضيّون ومن بينهم ديودونّيه، على أنّ الرياضيّات الحقّة هي تلك التي لا تُعنى بأيّ تطبيق، بل تسعى إلى إكمال ذاتها كبنيان خاصّ، بل كعالمٍ مستقلّ يستطيع الفكر أن يجدَ فيه مجالاً رحباً لإمكاناته الحقيقيّة. إن الرياضيّات من هذا المنظور فنٌّ من الفنون، بل هي أحد أرقى الفنون ذلك أنها أصعبها. هذا ما يراه برتراند راسل أيضاً حين يقول: "*إننا لو استعرضنا الرياضيّات*

استعراضاً صحيحاً، لما وجدنا فيها الحقيقة فحسب، بل وجدنا فيها جمالاً سامياً جمال البرود والقسوة والصرامة. هو جمال فيه الصفاء والسناء، والمقدرة على بلوغ الكمال، الذي لا يتاح إلاّ لأعظم الفنون".

عودةٌ إلى التاريخ

ما من شكٍّ، رغم كلّ شيء بأنّ الرياضيّات لم تولد على هذا النحو. فالرياضيّات كما يعرّفها هيلبرت وراسل لم تكن كذلك حتّى بالنسبة لصاحب المبادئ، بيد أنّ البدايات المغرقة في القدم التي تعود إلى ذلك الراعي المجهول الذي علّم نفسه مقارنة خرافه بالحصيّات ليعلم إن كان قد فقد منها شيئًا أم لا، وما تبع ذلك خلال آلاف السنين من تعلّم العدّ ثمّ تجريد مفهوم العدد وصولاً إلى تجريد الأشكال الهندسية ودراسة خواصها تبيّن العلاقة البعيدة للرياضيّات بالحاجة العمليّة. فالرياضيّات إذًا، ولا بدّ من الإقرار بذلك، إنّما وُلِدَت في الأساس من الحاجة العمليّة، وهي ما تزال تتغذّى، بقدرٍ أو بآخر، من هذه الحاجة، بل إنّ العلاقة بين الرياضيّات البحتة والتطبيقيّة قد تحوّلت مع الآلات الحاسبة الضخمة إلى علاقةٍ جدليّة فالحواسب الجبّارة تقدّم خدماتٍ كبيرةٍ اليوم للرياضيّات البحتة نفسها، في حين لا يخفى على أحد أنّ هذه الحواسب هي نتاج تلك الرياضيّات.

ما من شكٍّ إذًا أن كَتَبَة بابل ما كانوا يفكّرون على هذا النحو. وإذا كنا نستطيع أن نقول بكلّ راحةِ ضميرِ اليوم أنّ أولئك القوم لم يعرفوا الرياضيّات حقّاً فإنّ علينا أن نأخذَ بعين الاعتبار أنّ أحفادنا وربّما بعد زمنٍ غير بعيد سيرَون في الرياضيّات شيئًا آخر مختلف تمامًا عمّا نراه فيها اليوم. وسيرَون في كلّ ما وصلت إليه معارفنا الرياضيّة مجرّد تمهيدٍ لدخول

عالم الرياضيّات بل ربّما أنّ عبارة "عالَم الرياضيّات" سوف تبدو مضحكةً نوعًا ما بالنسبة لهم، تمامًا كما نعجب اليوم للوصفات الرياضيّة الجاهزة التي تركها لنا البابليّون والمصريّون. ينبئنا تاريخ الرياضيّات أنّ الرياضيّات "شيءٌ" أكثر ديناميكيّةً من أن نستطيعَ وصفه بكلمةٍ أو تشبيهه باستعارة... أعتقد أنّ الرياضيّات هي شيءٌ نستكشفه. هي شيءٌ كبيرٌ جدًا نستكشفه عبر آلاف السنين. ومن المبرّر لنا أن نصفه على نحو ما نراه في وقتٍ من الأوقات على أن نتذكّر دومًا أنّ معرفتنا هذه ليست بكاملة وعلى حدّ ما ينبئنا غودل لن تكون. فبالنسبة للحضارات ما قبل اليونانيّة نستطيع أن نقولَ اليوم إنّ الرياضيّات كانت موجودةً (بمعنى أنّ أولئك القوم قد اكتشفوا بعض الأشياء البسيطة من عالم الرياضيّات) ولكنّها كانت مجموعة طرقٍ أنتجتها الخبرة الطويلة، لحلّ مسائل الحياة المطروحة. أمّا مع الإغريق ومع كتاب المبادئ تحديدًا فقد صارت الرياضيّات شيئًا آخر: بناءً منطقياً متماسكاً لكنّه، وإن انفصل عن التطبيق المباشر، كان وليد المفاهيم والبديهيّات المستوحاة من العالم الفيزيائيّ الذي نعيش فيه. تمّ تجاوز هذه النظرة مع أعمال غاوس ولوباتشفسكي وريمان وغيرهم ولم تعد البديهيّات بديهيّات ولم يعد الحسُّ السليم مقياسًا... إلى أن صارت الرياضيّات مع راسل هي الشيء الذي لا نعرف فيه عمّا نتحدّث. هكذا، أصبحت فروع الرياضيّات المختلفة بنىً تقوم على موضوعاتٍ لا تخضع لضرورات المنطق لكنّها تفضي إلى نتائج، لا يشترط أن تكون منطقيّةً أيضًا إنّما أن تكون غير متناقضةٍ فيما بينها. ومع ذلك فإنّ نقصًا شديد الأهميّة ظلّ موجودًا في معرفتنا لطبيعة هذه البنى. فقد ظلّ يُظنُّ وبدون مبرّر، إلا إذا أخذنا المبرّرات النفسيّة بعين الاعتبار، أنّ الرياضيّات هي بناء،

قد لا يقوم على أسسٍ توافق الحسّ السليم ربّما، لكنّها بناء يجب أن يكتمل أو هي بناء كامل وتنتظر أن يُكتشف بكامله. إلى أن أتى غودل وأيقظنا من وهمنا هذا. يمكننا مبدئياً تقسيم تاريخ الرياضيّات إلى أربعة مراحل رئيسة كان مفهوم الرياضيّات نفسه يتغيّر عبرها بين مرحلةٍ وأخرى:

أولاً: الرياضيّات منذ ما قبل التاريخ حتّى اختراع العدّ.

ثانيًا: من اكتشاف الأعداد حتّى كتاب المبادئ لإقليدس.

ثالثًا: من إقليدس حتّى الثورة الرياضيّة في القرن التاسع عشر التي انتهت بنظريّة غودل.

رابعًا: الرياضيّات بعد نظريّة غودل. وهي مرحلةٌ لم يجرِ فيها الكثير من الأشياء بعد. فكلّ التطوّر الكبير جدّاً في الرياضيّات بعد غودل ما هو إلا استمرار لرياضيّات القرن التاسع عشر. ويمكن شرح ذلك كما يلي: بعد أن وضع إقليدس كتاب المبادئ ظلّ تطوّر الرياضيّات بطيئًا ويمكننا النظر اليوم إلى جميع ما تمّ من تقدّم في الرياضيّات منذ ذلك الحين، سواء عند العرب أو في أوروبا عصر النهضة...، كونه إكمالٌ لرياضيّات الإغريق وتمهيد طريقٍ للتطوّر الكبير المقبل على أيدي غاوس ومن تبعه. ولعلّ هذا ما يجري الآن ولقد نحتاج إلى زمنٍ طويلٍ بعد وكلمة طويل تبقى غامضة الدلالة بالتأكيد، قبل أن ندرك طبيعة التطوّر المقبل في الرياضيّات ذلك أنّنا لن نعرف الكثير عن طبيعة هذا التطوّر قبل أن يحدث.

نستشفّ من هذه النظرة إلى الوراء حقيقةً لا مفرّ منها: إنّ الرياضيّات "شيءٌ" يتكوّن. (دون أن يعارض ذلك أنّها شيءٌ موجود أصلاً!) وهكذا فإنّ أقصى ما أستطيع أن أجيز لنفسي الحديث عنه ووصفه هو *رؤيتي* لطبيعة الرياضيّات *اليوم* وليس أبدًا طبيعة الرياضيّات.

عالمٌ رائع

منذ نيّفٍ وألفين من السنين جمع إقليدس جميع المعلومات الهندسيّة التي كانت قد أصبحت كافيةً في عصره ليشيّدها في بناءٍ متناسقٍ إلى حدٍّ كبير. وخلال أكثر من ألفين تاليين من السنين كانت الأرض المجاورة لهذا البناء تتحضّر بهدوء وكانت لبنات ومواد بناء جديدة أكثر تطوّرًا من مواد أقليدس تتحضّر هي أيضًا. وفي مستهلّ القرن العشرين، وبإلهامٍ من ظهور الهندسات اللاإقليديّةٍ من جهة، والبنى الجبرية من جهة أخرى، وبفضل نظريّة المجموعات، لغة الرياضيّات الجديدة، أُعيدَ بناء معظم فروع الرياضيّات في أبنيةٍ تحاكي بناء إقليدس. وهي أبنية يبدي بعضها تشابهًا حدَّ التطابق، تمامًا كتشابه أبنية الجمعيات السكنية، فتسمّى بنًى إيزومورفية. في حين يختلف بعضها الآخر فتبدو كأبراج مرتفعةٍ أو كأبنيةٍ بسيطة أو كمنتجعاتٍ يستطيع فيها الرياضيّ أن يمضي وقتًا للراحة والمتعة! وفي نهاية الأمر يشكّل مجموع هذه الأبنية معًا عالم الرياضيّات الرائع! فالرياضيّات عالمٌ آخر، مفارقٌ ومتعالٍ، مادّته شفّافة، ويتجسّدُ في عالمنا الخشن بطرقٍ لا عدد لها.

يبدو أنّ ثمّة بعض التناقض حين نقول من جهةٍ أنّ الرياضيّات عالمٌ مفارق موجود بذاته. وعندما نقول أنّ الرياضيّات هي بناءٌ أو عالمٌ نشيّده

بفكرنا. ولا بدّ من التأمّل كثيرًا في هذا الموضوع. ومن جهةٍ أخرى وسواء كانت الرياضيّات عالمًا نكتشفه أو عالمًا نخترعه فما هي علاقته الحقيقية بالعالم الواقعي الماديّ؟

يعتبر الكثير من الرياضيّين، وأنا أميل كثيرًا إلى هذه النظرة، أنّ عالمنا العزيز هذا، الذي أخشى ما نخشى هو أنّنا لا ننفكّ نعمل على تدميره، ما هو غير تجلٍّ لعالمٍ أو لعوالم أكثر عمقًا ورسوخًا وحقيقةً وبدئيّةً منه. ويبدو أنّها بكلّ تأكيد عوالم ذات طابعٍ رياضيّ. فممّا يُدهَش له في الرياضيّات أيضًا وجودها في عمق الطبيعة وفي عمق بناء الكون لا كتصميمٍ أوليٍّ فحسب بل حتّى كلبنةٍ أساسيّة في بناء الكون الماديّ فعلى نحو ما يقول عالم الفيزياء الكبير فيرنر هايزنبرج: "*إنّ اللبنات الأساسيّة للمادّة ليستِ الذرّات على نحو ما كان يقول ديمقريطس، بل هي توابع رياضيّة!*" وما من شكٍّ أنّ هايزنبرج كان يقصد بالتحديد التوابع الموجيّة الذائعة الصيت في الميكانيك الكموميّ. ومع أنّ هذه الحقيقة تشكّلُ تحدّياً عظيمًا لمنطقنا ولحسّنا السليم وصدمةً نفسيّةً كبرى لفكرنا الذي تعوّد الفصل المطلق بين الماديّ من جهة والذهنيّ أو الفكري أو النفسيّ أو الروحيّ من جهةٍ أخرى بيد إني أترك للقارئ أن يطلق لفكره العنان حول هذا الموضوع الشديد الحساسيّة وأعود للحديث عن موقع البناء الرياضيّ من الطبيعة.

لقد كانت حقيقة وجود بناء رياضيّ ينتظم الطبيعة أمراً مسلّماً به خلال جميع العصور، وقد عبّر عنه أفلاطون قديماً حين قال: "*ما انفكّ الإله يمارس الهندسة*" القول الذي أعاده بعد ألفي عام الألماني جاكوبي قائلاً: "

ما انفكّ الإله يمارس الحساب" أمّا جيمس جينز فهو يرى أن *"مهندس هذا الكون العظيم قد بدأ يظهر على أنه عالمٌ رياضيٌّ بحتاً"*

ثمّة قناعةٌ راسخةٌ، عند معظم كبار العلماء والمفكّرين، عبر جميع العصور تؤكّد أن الظواهر الطبيعيّة، بجملتها وتفصيلها، هي انعكاسٌ ماديّ يقوم وراءه بناءٌ رياضيٌّ مجرّد يعبَّر عنه بالمعادلات والرموز والأعداد والأشكال وكأنَّ العالَم الماديّ مصمَّم وفق بنيةٍ رياضيّةٍ يشبه بناؤها البنية التي تحدّثنا عنها.

إنّ ديكارت الذي كان يعتبر نفسه فيلسوفاً أكثر منه رياضيّاً، قد طرح تساؤلاً حول مدى استطاعةِ الرياضيّات، وليدةَ التفكير البحت للعقل البشري، تزويدَنا بالمعرفة عن العالم الطبيعيّ؛ لو لم تكن هذه الرياضيّات نفسها قائمةً في جوهر خلق العالم. أما غاليليو، وهو نفسه العالم الذي اضطُهد لقوله إنّ الأرض تدور، فهو يرى *"أنّ المبادئ الرياضيّة هي الأبجديّة التي كتب بها الله هذا العالم وبدونها سوف يكون صعباً علينا أن نفهم كلمة واحدة من كتاب الطبيعة"* .

إنّ هذا التطابق بين البناء الرياضيّ والبناء الطبيعيّ، ليس أمراً شديد الأهميّة فحسب، بل هو بالنسبة للرياضيّين مصدر فرح وغبطة، يقول الرياضيّ ليو كادانوف L. Kadanoff: *"إنها لعمري تجربة لا نظير لها. أن يعي العالِم أن ما يجري في دماغه يتناسب تماماً مع ما يجري في الطبيعة. إنها أفضل ما يمكن أن يحدثَ للرياضيّ ولكم هو رائع أن يمكن ذلك. إن الدهشة تتملّكه إذ يكتشف أنّ بناءً قد أشاد صرحه عبر فكره الخاصّ يمكن أن يتحقّق بالفعل في عالم الواقع؛ أيّ صدمةٍ كبرى وأيّ فرحٍ كبيرٍ جدّاً جدّاً"* .

هكذا، كان اكتشاف الهندسات اللاإقليديّة خلال القرن الماضي أحدَ أكبر الامتحانات لقدرة الرياضيّات على النطق باسم الطبيعة. فقد تحدَّت هندسة لوباتشفسكي ومن بعدها هندسة ريمان وغيرهما من الهندسات الجديدة التي تلاحقت من بعدهما،...أن تجدَ تطبيقاً لها أو إمكانيةً لإسقاطها في العالم الطبيعيّ. لكنّ ذلك لم يطل جدّاً إذ سرعان ما وجدتِ الهندسات اللاإقليديّة على كثرة تنوّعها وتعدُّدها تطبيقاتها المختلفة، بدءاً من العلوم البيولوجيّة وانتهاءً بالنظريّة النسبيّة لتثبت لنا مرَّة أخرى أن عالم المطلق يوازي دوماً عالم الواقع، أو كما قيل في القديم: *"كما في السماء كذلك على الأرض"*.

لكنّ الملاحظة الجوهريّة التي تبهرنا هنا هي التالية: لا شكّ أنّ ريمان قد أبدع حقّاً هندسته المشهورة. لقد فكّر وتأمّل وكتب معادلاتٍ ووضع أشكالاً وأخطأ وصوّب وطوّر عمله إلى أن جاء بتحفته. نستطيع أن نقول بثقةٍ إذًا أنّ ريمان قد بنى هذا العمل الفكريّ. ومع ذلك فإنّ استخدام هذه الهندسة من قبل آينشتاين لتفسير بناء الكون في النظريّة النسبية يدلّنا على أنّ هندسة ريمان هي شيءٌ موجودٌ في الطبيعة من قبل أن يأتي به ريمان. ونستطيع بالتالي أن نقول بثقةٍ أيضًا أنّ ريمان قد اكتشف شيئًا موجودًا. أمّا المفارقة الأخرى والأكثر إدهاشًا فهي أنّ هذا البناء المجرّد، المبني من مادّةٍ غير موجودة، الذي لا نعرف فيه عمّا نتحدّث، إذا شئنا استخدام تعبير راسل، يقوم في أساس تصميم الكون الماديّ!

يساعدنا التأمّل في النتيجة الباهرة لنظريّة غودل في فهمٍ أكثر عمقًا للموضوع. فإذا اعتبرنا الرياضيّات عالمًا يُكتَشَف فإنّ هذه النظريّة يمكن أن تُصاغ كما يلي: إنّنا لن نستطيع أن نطوف كلَّ أرجاء المملكة!

وستبقى هناك أماكن مغلقةٌ علينا ومحظورةٌ على عقولنا، وإذا ما تجرّأنا على اقتحامها فسنكون حينئذٍ قد عبثنا بالبناء ككلّ وغيّرنا من طبيعته. وهذا التشبيه يستدعي ملاحظتين كبيرتي الأهميّة:

- تشبه هذه الأماكن المحرّمة في مملكة الرياضيّات شجرة المعرفة في أسطورة الخلق في سفر التكوين. ففي هذه الأسطورة التي نستطيع أن نتعلّم منها أشياء كثيرة يؤدّي تجاوز الحدود والقطف من الشجرة المحرّمة إلى خسران الجنّة، إلى تغيّير العالم الذي أُعطي لنا أن نعيش فيه. ولكن ألم يكن في ذلك ربحٌ لما هو أثمن؟ لهذه التجربة الرائعة التي عمرها ملايين السنين؟ تجربة الحياة والمعرفة والمشاركة في الخلق؟ ثمّة ما هو مشابهٌ في الرياضيّات: عندما مسّ لوباتشفسكي قداسة موضوعات إقليدس انتهى به الأمر إلى عالمٍ جديد. لقد خرجنا من العالم البسيط والبريء والهادئ عالم المثلّثات والدوائر والأشكال البسيطة الذي كنا نرى فيه كمال الانسجام والتناسق لكنّنا ربحنا غنًى كبيرًا جديدًا في عوالم الهندسات اللاإقليديّة التي لا حدود لها. واكتشفنا أبعد من ذلك أنّ مملكتنا أوسع بكثير مما ظننّا وأنّ ما كنّا نعرفه منها ليس سوى الجزء اليسير. يبقى أن أشير هنا إلى الفائدة الجزيلة التي يمكن أن يقدّمها العلم وفلسفة العلوم حتّى في الفهم الصحيح للأساطير!
- تأخذ نظريّة غودل معنًى موازيًا تمامًا لمبدأ الريبة الفيزيائي في الميكانيك الكوانتي. فكما يؤدّي رصد ظاهرةٍ فيزيائيّة على مستوى الجسيمات الأوّليّة، إلى التأثير على هذه الظاهرة وبالتالي عدم

الإمكانيّة الموضوعيّة للرصد. وبحيث يصبح الراصد مشاركًا في خلق الظاهرة. كذلك لا يستطيع الرياضيّ وصف البنية الرياضيّة على نحوٍ لا يؤثّر به هو نفسه في هذه البنية، فالرياضيّ إذًا يكتشف البنية الرياضيّة الموجودة أصلاً لكنّه يساهم في خلقها في الوقت نفسه ويستطيع أن يجري عليها الكثير من التعديلات بحيث يعيد صياغتها وفق غرضه دون أن يمنع ذلك أنّ هذه الصياغات المختلفة والجديدة كانت موجودةً أصلاً. يبقى الفرق بين الرياضيّات والفيزياء الكوانتية هو أنّ الإمكانيات المختلفة في الميكانيك الكوانتي تكون موجودةً بالقوّة أي بالكمون إلى أن يؤدّي تدخّل الراصد إلى ظهور إحدى هذه الحالات. في حين أنّها في الرياضيّات موجودة على نحوٍ حقيقي في عالم الرياضيّات المطلق الذي لا مادّة له. ولا ينفي اختيار الرياضيّ لإحدى الصياغات، الأمر الذي نسمّيه اكتشافًا أو ابتكارًا، الوجود الكامل للصياغات الأخرى.

يبدو لي أنّ السؤال المطروح لم يعد السؤال التقليديّ: هل الرياضيّات اكتشاف أم ابتكار. بل سؤالٌ أكثر عمقًا بكثير: هل يغيّر اكتشافنا لعالم الرياضيّات المطلق طبيعة هذا العالم؟

إنّه عالمٌ أكبر وأعظم بكثيرٍ ممّا نظنّ. وإذا كان دالامبير ولاغرانج قد ظنّا في منتصف القرن الثامن عشر أنّ الرياضيّات قد توسّعت أكثر ممّا ينبغي، فإنّ الرياضيّين التقدميّين اليوم، من المتحمّسين لأعمال غودل، يرون أنّنا ما زلنا نحبو في عالم الرياضيّات. فكلّ الرياضيّات التي نعرفها اليوم هي مجموعةٌ صغيرة من بين جميع التشكيلات الممكنة التي يمكن

أن نضعها في عالم المنطق المثنّى. ويبقى هناك المنطق الثلاثيّ والمنطق المتعدّد بشكلٍ عام الذي يمكن أن يفتح لنا في هذه المملكة، في هذه العالم الرائع، أشياء لا تخطر لنا في بال.

ما من شكٍّ أنّ إقليدس وجميع الرياضيّين الذين درسوا ودرّسوا وعملوا في الرياضيّات الإقليديّة حتّى القرن التاسع عشر لم يفهموا أبدًا طبيعة الهندسة الإقليديّة بالمعنى الذي نفهمها به اليوم. وعلى هذا النحو بالضبط سيجد أحفادنا في رياضيّات اليوم شيئًا لن نستطيع فهمه لأنّنا من أجل ذلك علينا أن ننظر من أفقٍ أوسع وفي ذلك الحين ستكون رياضيّات اليوم جزءًا يسيرًا من عالم الرياضيّات الجديد العتيد. هكذا وكما يقول أندريه ويل وهو رياضيّ آخر من مؤسّسي مجموعة بورباكي: "*سوف يخرج رياضيّ المستقبل، كما فعل رياضيّ الماضي، عن الدرب المطروق. وسوف يحلّ المسائل الكبيرة التي يرثها منّا بمقارناتٍ غير متوقّعة يعجز خيالنا عن إدراكها*".

لماذا الرياضيّات؟

لـن تكون القضيّة فـي المستقبل قضيّة الخير والشرّ بل قضيّة الجميل والنافع.

روبير هنار.

تطرح الفلسفة الأسئلة أما العلم فهو يجيب عليها.

آلان وود

أعتقد أنّ أوّلَ سؤالٍ يمكن أن يخطر ببال القارئ لدى وصوله إلى هذا العنوان في هذا الموقع من الكتاب هو التالي: ما الداعي لفصلٍ عنوانه لماذا الرياضيّات؟ ألا يشكّل كلّ ما تقدّم جوابًا وافياً لهذا السؤال؟

ثمّة بالنسبة لي ما هو أهمّ بكثير. وسأحاول فـي هذا الفصل شرح ما أظنّه الأكثر جوهريّةً فـي دور العلم بشكلٍ عام والرياضيّات بشكلٍ خاصّ فـي حياة البشريّة... فلماذا الرياضيّات؟

سؤالٌ يسمعه كلُّ مدّرسٍ للرياضيّات مرّاتٍ كثيرةٍ جدًّا ولعلّه يُكرَّرُ على مسامع أهالي التلاميذ أيضًا. لماذا الرياضيّات؟ لماذا الجيب والتجيب؟ لماذا اللغاريتمات؟ ماذا نستفيد، في حياتنا العملية من الأعداد العقدية؟ ما هو معنى التوابع الخطّيّة؟ ألا يكون هذا كلّه تضييعًا للوقت وهدرًا للجهد؟

لماذا ما نزال نتعلّم الجمع والضرب والقسمة وإيجاد الجذر التربيعي والآلة الحاسبة التي تقوم بذلك على نحوٍ أفضل منّا تباع بعشرين ليرة؟

هذا السؤال الأخير تحديدًا، يذكّرني بسؤالٍ آخر يشبهه: لماذا يبذل عدّاء الماراتون كلّ هذا الجهد طالما أننا في عصر السيارات السريعة والقطارات السريعة جدًّا والطائرات، أما كان يستطيع أخذ سيّارة أجرة؟ أو لماذا يجري إثنان وعشرون لاعبًا (في لعبة كرة القدم) لاهثين وراءَ كرةٍ واحدة طالما أن هناك ما يكفي من الكرات؟ ما أريد الإشارة إليه هنا هو كون الرياضيّات رياضتين للذهن بقدر كون الجري وكرة القدم رياضتان للبدن. والذهن الذي لا يُريَّض يبقى ذهنًا بليدًا قاصرًا عن خدمة صاحبه، في هذا الزمان المعقّد، على نحو ما ينبغي. لكنّ القصّة الأخرى التي تحملُ الكثير من المعنى والتي أودُّ أن أرويَها هنا قد جرَت قبل عصر القطارات والطائرات بزمنٍ طويل وبالتحديد منذ نحو ثلاثةٍ وعشرين قرنًا فقط: فلقد جاءَ شابٌّ يسألُ إقليدس: هلا أخبرتني بالفائدة الحقيقية لدراسة كتاب المبادئ؟ فما كان من إقليدس غير أن نادى خادمه وقال له: أعطه قرشًا فهو يبحث عن النفع لا عن المعرفة. الأمر المؤسف كليًّا هنا هو أنّ المدارس والجامعات لم تعد اليوم، على نحو العموم، أماكن للثقافة والمعرفة بل لتعلّم وسائل الحصول على القروش والليرات والدولارات. التقى أحد الأشخاص زميل دراسةٍ قديم لم يره منذ أن تخرّجا معًا من المدرسة الثانوية. سأل الرجل وكان ابن تاجرٍ كبيرٍ ورث تجارة أبيه ونهض بها، زميله القديم: كيف أحوالك ماذا تعمل هذه الأيام. أجاب الآخر. أستاذًا للرياضيّات. لا بأس عليك، قال التاجر، العمل لا يعيب صاحبه! وما هذه بطرفة بل هي واقعٌ مأساويٌّ عانى منه جميع رجال العلم والفكر في كلّ

العصور وفي كلّ الأماكن. وهو واقعٌ يفسّر لنا السؤال الذي يطرحه التلاميذ وغير التلاميذ عن فائدة الرياضيّات ذلك أنّ منطق البشر اليوم هو منطق النفع لا منطق المعرفة.

ولكن لماذا الرياضيّات حقًا؟

غالبًا ما يسمع التلاميذُ أجوبةً تحيِّرهم أكثر مما تطمئنهم. كأن يُقال لهم على سبيل المثال: لولا الأعداد العقدية لما كان هناك تلفزيون! ورغم أن هذا صحيحٌ تمامًا إلا أنه جوابٌ لا يبتعد عن منطق النفع بل يكرّسه فضلاً عن كونه يخلق من الإبهام أكثر مما يجلي منه. فما علاقة i وهو حسب تسمية الرياضيّين أنفسهم "العدد الوهمي" بهذا الجهاز الذي اعتدنا على وجوده حتّى بات شيئًا "طبيعيًا"، نتاجًا لصناعةٍ ما لا تمتُّ لأي علمٍ بأيّة صلة؟ ذلك أنّ الطريقة التي درجنا على التفكير وفقها والتي يؤيّدها الواقع هي التالية: يستطيع أيُّ "جاهلٍ" يملك ما يكفي من المال أن يبنيَ مصنعًا ضخمًا يعمل فيه عمَّالٌ مدرَّبون على آلاتٍ معيّنة (بل قد لا يحتاج بفضل الروبوتات والأتمتة إلى أي عمّال) لا يفقهون، لا هم ولا معلّمهم، أيَّ شيءٍ عن الأعداد العقدية، يُنتِجُ آلاف الأجهزة التلفزيونية التي يستخدمها، أعني يستهلكها، ملايين الناس الذين لا يعرفون هم بدورهم أيّ شيءٍ عن الرياضيّات، اللهم إلا تمييز الأرقام في جهاز التحكّم وهو أمرٌ سوف نستغني عنه عمّا قريب حين سيكفي، بفضلِ مزيدٍ من تطبيق الرياضيّات في التكنولوجيا، أن نخاطب الجهاز بلغتنا الطبيعيّة طالبين منه أن يعمل أو أن يتوقف أو أن يغيّر المحطّة، الخ.. لكنّ الأمر الذي لا تنتبه له الأغلبيّة مع ذلك هو أنّ هذا المعمل لن يطوّر منتجاته في هذه الحالة طالما لا يوجد مهندسون يعرفون الكثير من الرياضيّات يعملون في هذا المجال...

قد يجد بعض أولئك التلاميذ الذين يطرحون الأسئلة، وأعني منهم الذين يتابعون دراسات علميّة معيّنة، بعضًا من الجواب على ذلك السؤال الكبير: "لماذا الرياضيّات". فيفهمون الطريقة التي تُطبَّق فيها كلّ التجريدات الرياضيّة الغريبة في مختلف مناحي التكنولوجيا وفروع العلوم الأخرى... ولكن هل يتوقّف دور الرياضيّات على تطبيقها في العلوم ومناحي الحياة الأخرى؟ لو كان الأمر كذلك فبئس الرياضيّات إذًا والعلم كلّه الّذي سرق من الإنسان هناء الجهل مقابل رفاهيةٍ زائفة تضعه اليوم أمام تحدّي البقاء أو الفناء. بيد إني أؤمن أنّ دور الرياضيّات والعلم يتجاوز هذه الخدمات المتواضعة، على أهميّتها، وغير الضرورية دومًا للإنسان. أعتقد أنّ الإجابة الأعمق على هذا السؤال "لماذا الرياضيّات" نادرًا ما تصل حتى إلى أولئك الذين يتّخذون الرياضيّات نفسها مادّةً لدراساتهم الجامعيّة والعليا أو وسيلة لكسب رزقهم في تدريسها ورغم ذلك تستمرُّ الرياضيّات بالتدخل في حياة الناس وعلى جميع المستويات ويزداد دخولها في المناهج الجامعية إلى حد أن لا تخلو منها كلّيّات الآداب!

أبعد من كلّ تطبيق يبقى العلم في جوهره منهجًا معرفيا يرمي إلى فهم الإنسان والكون والإجابة على الأسئلة القديمة نفسها: من نحن، من أين أتينا، إلى أين نذهب، وما هو معنى وجودنا؟ تقوم الفيزياء بشكلٍ أساسيّ بهذه المهمّة تساعدها فروع العلم المختلفة الأخرى من كيمياء وبيولوجيا وطبّ وجيولوجيا... أمّا الرياضيّات فهي تتعامل، كما سبق أن رأينا، مع كائنات مجرّدة، مع بنات أفكار، وليس مع أمور ملموسة أو مفاهيم طبيعية كما هو الحال في العلوم الأخرى ولعلّ هذا هو السبب الأساسيّ فيما يبدو ظاهريًا من بعد الرياضيّات عن الإسهام المباشر في

عملية معرفة الطبيعة. إلا من خلال العلوم الأخرى. ولكن لنتوقف قليلاً هنا، عند كلمة "المعرفة".

عودةٌ إلى أسطورة الخلق

منذ البدء سعى الإنسان لوعي وجوده ولمعرفة الحقيقة التي تنتظم هذا الوجود. تروي الأسطورة آنّ الإنسان الأوّل قد تناول من الشجرة المحرّمة، شجرة المعرفة، فسقط! كذا كانت المعرفة علّة الوجود الإنسانيّ على كوكب الأرض. أفلا تكون غايةَ هذا الوجود والقصدَ منه أيضًا؟ إنّ الإنسان لمّا يكفَّ لحظةً منذ ذلك الحين عن السعي وراء المعرفة، فهو يبحث بدأبٍ مستقصيًا كلَّ الأشياء ممعنًا في تحليل كلٍّ ما حوله. ذلك أن شعورًا عميقًا، واعيًا حينًا وخافيا في أغلب الأحيان، يغذّي فيه نزعة البحث، ويؤكّد له العقيدة بوجود حقيقةٍ أوّليّة تنتظم الكون بمجمله وبما فيه الوجود الإنساني، حقيقةٍ لا يستطيع المرء التنكّر لها. إذ يعني إنكارُها إفراغًا للوجود الإنسانيّ من معناه ومن رسالته. كذا تكون حياة الإنسان رحلةً في طريق المعرفة وتحقيقًا يسعى لإكمال ذاته في الوصول إليها.

ولكي أكون أكثر وضوحًا في تحديد معاني الكلمات. أشير إلى أنّ مفهوم الحقيقة ضمن ما ورد لا يعني بالنسبة لي كمّيّةً من المعلومات الصحيحة أو كلّ المعلومات الصحيحة الممكنة. وهو ليس صيغةً أو قانونًا نهائيًّا يصف العالم بجملته وتفصيله، حتّى وإن كان ذلك ما يفكّر به معظم الناس ويبحث عنه كبار علماء الفيزياء في النظريّة الموّحّدة. إذ إنّ أيّة معلومةٍ هي معلومةٌ نسبيّةٌ حكمًا وأيّةُ نظريّةٍ علميّةٍ هي نظريّةٌ تستطيع الاضطلاع بوصف بعض مظاهر الطبيعة ضمن ظروفٍ وأحوالَ معيّنة. في

حين نتحدّث هنا عن معرفة الحقيقة المطلقة، والتي نعتبر الوصول إليها غاية الوجود الإنسانيّ ورسالته. إنّ ما نرمي إليه عندما نتحدّث عن الحقيقة هو حالةٌ أخرى من الوجود أكثر سموًّا. ومعرفة الحقيقة هي بالتحديد صيرورةُ الترفّع نحو هذه الحالة.

إنّ المعرفة بهذا المعنى هي فعل تحقيقٍ لا امتلاك، وبمعنىً أكثر وضوحًا ودقّةً نقول إنّ فعل معرفة الحقيقة هو فعل تفتّح ذهنيّ وتاليًا نفسيّ، يتجاوز فيه الإنسان إمكاناته ليصعِّدَها إلى مرتبةٍ أرفع. فللمعرفةِ كما رآها الشيخ محي الدين ابن عربي *"ثلاثة أشكال، أوّلها ثقافي، وثانيها عاطفي، أمّا الثالث فيجسّد المعرفة الحقّة، التي تميّز معرفة الحقيقة. وفي الشكل الثالث يمكن للمرء وعي ما هو صوابٌ وحقّ من خلف حدود الفكر والإحساس"*.

كذا لا نفرِّق بعد بين عبارة "فعل معرفة الحقيقة" وعبارة "سيرورة التفتّح البشريّ". هذا الفعل وتلك السيرورة الذَين سلك فيهما الإنسان طرقًا شتّى من فنونٍ وعلومٍ وفلسفاتٍ وأديان، ومن طرائق روحيّة وصوفية وعلوم نفسيّة، وحتّى من سحرٍ وتنجيمٍ وشعوذة، وطرق أخرى أكثر من أن تحصى وإذا كنّا لا ننكر أهمّيّة جميع أوجه النشاط هذه وضرورةِ كلٍّ منها في مرحلةٍ أو أخرى من تاريخ البشر، وتكاملها في توجيه الإنسان نحو تحقيق ذاته فإنّنا نشدِّد على دور العلم، وأعني العلم البحت، كونه الطريق الأكثر جمعيّةً في قيادة هذه السيرورة على المستوى العالميّ. إنّ العلم وفي أساسه الرياضيّات هو أهمُّ الطرق التي تُوجِّهنا إلى إدراك الحقيقة المنشودة. وكما قال مرّة العالم الكبير آلبرت آينشتاين، وليعذرني القارئ

على التكرار: " *لا يتردّد العلم أبدًا في معارضة المنطق العام الفطريّ، فالذي يخشاه هو التضارب بين المفاهيم السائدة والمعطيات الجديدة. وإن حدث هذا التضارب، فإنّ العلم سرعان ما يسحق الفرضيّات القائمة ليصعّد معرفتنا إلى سويّة أعلى*" وواقع الأمر أنّنا إذا راجعنا بتأنٍّ بعض صفحات تاريخ العلم، وجدنا أنّ كلَّ اكتشافٍ علميّ هو في الظاهر إضافةُ معلوماتٍ جديدة، لكنّه في الجوهر قفزةٌ نوعيّة في سلّم معرفتنا، مع كلّ ما يعني ذلك من تغيّر في بنيتنا نفسها وعلى مستويات شتّى.

إن اكتشاف لامركزيّة الأرض، على سبيل المثال، يمكن أن يعني في العمق نقلةً نوعيّةً للإنسانيّة نحو تجاوز أنانيّةٍ جمعيّة، إن جاز التعبير، ونحو فهمٍ أفضل لموقع هذه الإنسانيّة في الكون. ويمكن لهذا أن يفسّر لنا سبب ردّة الفعل الأصوليّة على اكتشاف الحقيقة والتي أدّت إلى إحراق جوردانو برونو وحبس غاليليو في إقامةٍ جبرية. أمّا الرياضيّات، فلا يخفى أنّها تقع، وعلى حدٍّ سواء، في أساس اختراع غاليليو لمنظاره وفي قلب رقصة الكواكب الأبديّة في السماء. وكمثال آخر نرى إذا تأمّلنا الثورة المعلوماتيّة التي تعمُّ عالمنا المعاصر، أنّ هذا التقدّم المعلوماتيّ، الذي ما كان ليتمّ بدون رياضيّاتٍ شديدةِ التعقيد وعالية المستوى، إنّما يشير في الجوهر إلى خطوةٍ هامّةٍ نحو شعورٍ أكبر بوحدة وعالميّة الإنسان وتحقيقٍ أعمقَ لهما وهو تحقيقٌ بدأ يتجلّى أكثر فأكثر، وعلى نحوٍ خاصّ في إمكانيّات التواصل المدهشة التي توفّرها التقنيات الحديثة الأمر الّذي يجعل الكثير من العلماء والمفكّرين يشبّهون شبكة الأنترنت والأدوات المتّصلة بها بمنظومةٍ عصبيّة لكائنٍ حيٍّ عضويٍّ عتيدٍ أن يولد هو الإنسانيّة برمّتها.

لقد قادتنا الرياضيّات، من جهةٍ أخرى، وعبر تاريخ تطوّرها الطويل إلى تصوُّرٍ فكريٍّ محدّد وغير ضبابيّ لفكرة اللانهاية عبر نظريَّة المجموعات. وأوضحت لنا مفهومي الحركة والاستمرار عبر حساب التفاضل والتكامل. وحدَّدت لنا معنى الصدفة من خلال نظريّة الاحتمالات. وأخيرًا وليس آخرًا، يعالج أحدثُ فروع الرياضيّات مفهومي النظام والفوضى ليعطيهما معنىً رياضيًّا لا لبس فيه وهو الأمر الذي تتصدى له نظريّة الشواش.

ولكن ماذا يعني تمامًا أن نحدّد رياضيًّا مفاهيم الحركة والصدفة والنظام والفوضى؟ يرى دومينيك ده بارل أنّ أهميّة العلم "*لا تقومُ بما يتيحُه لنا من معرفة وبما يفسِحُ من إمكانياتٍ فقط؛ بل بشكلٍ خاصّ باستحالةِ العقلِ الّتي ينجزها فينا بعمقٍ أكبر دومًا.*" وعلى هذا الأساس يمكن لتأمّلٍ عميقٍ أن يجعلنا نرى في هذه الأمثلة الوجه الآخر للتطوُّر الرياضيّ: لقد أعطت دراسة نظريّات المجموعات لعقولنا مقدرةً أعلى، فأصبح بإمكانها تحليل اللانهاية، وزوّد فهم التحليل الرياضيّ أدمغتنا بأضواء جديدة يلقيها على مفهوم الحركة. ومنحتنا نظرية الاحتمالات بصيرةً نواجه من خلالها إشكاليّة الصدفة ولا يخفى على أحد أن مفاهيم من هذا النمط: اللانهاية، الحركة، الصدفة، النظام والفوضى الخ. هي مفاهيم مفاتيح في فهمنا للكون والتعرف عليه، ولكن كيف تفعل الرياضيّات ذلك، وبأيّة طريقة؟

سوف تبقى الهندسات اللاإقليدية إحدى أروع النفائس في متحف الرياضيّات وهي تقدّم لنا مثالاً جيّدًا لما سبق أن أشرنا إليه عن كون صحّة

نقطة انطلاق ما (أي موضوعة ما) غير ضروريّة كي يكونَ البناء الرياضيّ سليمًا. لقد جاءت هندسة لوباتشفسكي ثورةً في تاريخ الرياضيّات، بل في تاريخ الفكر البشريّ، وقفزةً كبرى إلى الأمام، لا في الرياضيّات وحدها بل أوّلاً وأخيرًا في عقليّة عالِم الرياضيّات وخياله، وبالتالي في نموّ القدرة الذهنيّة للإنسان.

يوضح لنا مثال تطوّر الهندسة وصولاً إلى الهندسات اللاأقليدية كيفية تطور الفكرة الرياضيّة في مثالٍ هامٍّ من تاريخ الرياضيّات، لكنَّ المهمَّ في الأمر هو ما تنطوي عليه سيرورة هذا التطوّر ألا وهو السيرورة الموازية لتفتّح الفكر باتّجاه استيعاب المفاهيم الجديدة. فلا يختلف اثنان على الإقرار بأن ذهنًا يستطيع قبول وفهم وتصوُّر عددٍ من المستقيمات المتقاطعة توازي مستقيمًا واحدًا آخر، وأيضًا تصوّر العالم الذي تصحّ فيه هذه الموضوعة، يختلف كثيرًا عن الذهن الاقليديّ الذي لا يستطيع أن يقبلَ ما يخالفُ الموضوعة الخامسة لاقليدس. ولكن هل تبقى هذه القدرة على تخيّل واستيعاب عالمٍ لاإقليديّ، وبشكل عام هل تبقى مجمل القدرات التي يكتسبها عالِم الرياضيّات، حكرًا عليه وحده أولا يصبح مثل هذا التطوّر جزءًا من القدراتِ الكامنةِ لجنس البشر بحيث يصبح تدريبٌ بسيطٌ للذهن كافيا فيما بعد لنقل هذه الإمكانيّات. أليس هذا بعض ما يعلّمنا إيّاه علم نفس الأعماق؟ ألم يصبح واضحًا بما يكفي أنّنا نستطيع الحديث بشكل من الأشكال عن واعيةٍ جمعيّةٍ وعن عقلٍ جمعيّ يخصُّ بني البشر ويشتمل جميع معارف ومدركات الأفراد؟ أولا تظهر للعيان ملامح هذا العقل الجمعيّ تكشف عنها الثورة المعلوماتيّة المعاصرة؟

كذا نرى فعل الرياضيّات، والعلم على العموم، فينا. إنّنا نختلف بكلّ تأكيدٍ عن أجدادنا. فالهندسة المستوية التي كانت قبل ألفي سنة موضوعًا صعبًا وشائكًا تدرسه نخبة علماء ذلك الزمان هي اليوم جزءٌ من منهاجٍ لتلامذةٍ لا تتجاوز أعمارهم الخمسة عشر من السنين وقياسًا على ذلك، وقياسًا على تسارع التقدُّم العلميّ والتعليميّ، يمكننا أن نتصوّر وقتًا، غير بعيد ربّما، يدرس فيه طلاب المدارس الثانويّة النظريّة النسبيّة وميكانيك الكمّ، مع كلّ الرياضيّات العالية اللازمة لذلك. حتّى أنّ روبرت ماي أحد المساهمين في نظريّة الشواش يدعو من الآن إلى تدريس هذه النظريّة على مستوى المدارس الثانويّة وفي مختلف الفروع العلميّة في الجامعات.

الحياة في عالمٍ مختلف!

في حياته العلميّة، يستطيع العالم الرياضيّ، الغارق بين أشكاله ومعادلاته أن يعيشَ حياة أخرى، نوعًا من الحياة لا يستطيع أيّ إنسانٍ تخيّلها: حياةٌ في أربعةِ أبعادٍ أو أكثر مثلاً أو حياةٌ لاقليديّة في فراغٍ لاقليديّ وقد يتجاوز الرياضيّ في لحظاتِ استغراقه في عمله، الزمان والمكان أو على الأقلّ يعيشهما بطريقةٍ مختلفة. وما أقوله هنا حقيقةٌ تحدّث عنها الكثير من علماءِ الرياضيّات خلال تاريخها. ولعلّي أستطيع شرح بعض ذلك من خلال هذا المثال: لقد تدرّبت حاسّة البصر عند الإنسان على رؤية الأجسام في الأبعاد الموضعيّة الثلاثة ولتصوّر الأشكال في فضاءاتٍ مختلفة الأبعاد لا بدّ من تدريب حدسٍ هندسيّ يتجاوز قدرات الإنسان البصريّة. هذا بالضبط ما فعله الرياضيّون خلال القرن التاسع عشر: للقطعة

المستقيمة نهايتان، للمربّع أربعة رؤوس، للمكعب ثمانية رؤوس، فما الّذي يأتي بعد 2، 4، 8؟ لا شكّ أنّ "المربّع" في الفضاء الرباعيّ الأبعاد سيكون له 16 رأسًا. وفي الفضاء الخماسيّ الأبعاد 32 رأسًا وبطبيعة الحال برهن الرياضيّون على ذلك. لقد قادت هذه اللعبة اللطيفة إلى اكتشافاتٍ أكثر تعقيدًا. فمن المعروف أنّنا نستطيع أن نرسم في المستوي (الفراغ الثنائي البعد) الكثير جدًّا من الأشكال المنتظمة: المثلّث، المربّع، المخمّس المنتظم، المسدّس المنتظم، الخ أمّا في الفضاء الثلاثيّ فهناك خمسةُ أشكالٍ منتظمةٍ فقط هي رباعي الوجوه والمكعّب وثماني الوجوه وذو الإثني عشر وجهًا وذو العشرين. برهن الرياضيّون على وجود ستّة أشكالٍ منتظمة في الفراغ الرباعي أمّا الفراغات الخماسيّة والسداسيّة والسباعيّة الأبعاد فليس ثمّة في كلٍّ منها غير ثلاثة أشكالٍ منتظمةٍ فقط.

كان الرياضيّ الإنكليزي آرثر كايلي أحد أهمّ من أسهموا في اكتشاف هذه الحقائق الرياضيّة وفي حفل تكريمٍ أقيمَ على شرفه ألقى عالم الفيزياء المعروف جيمس ماكسويل كلمةً أنهاها بهذه الأبيات الشعريّة:

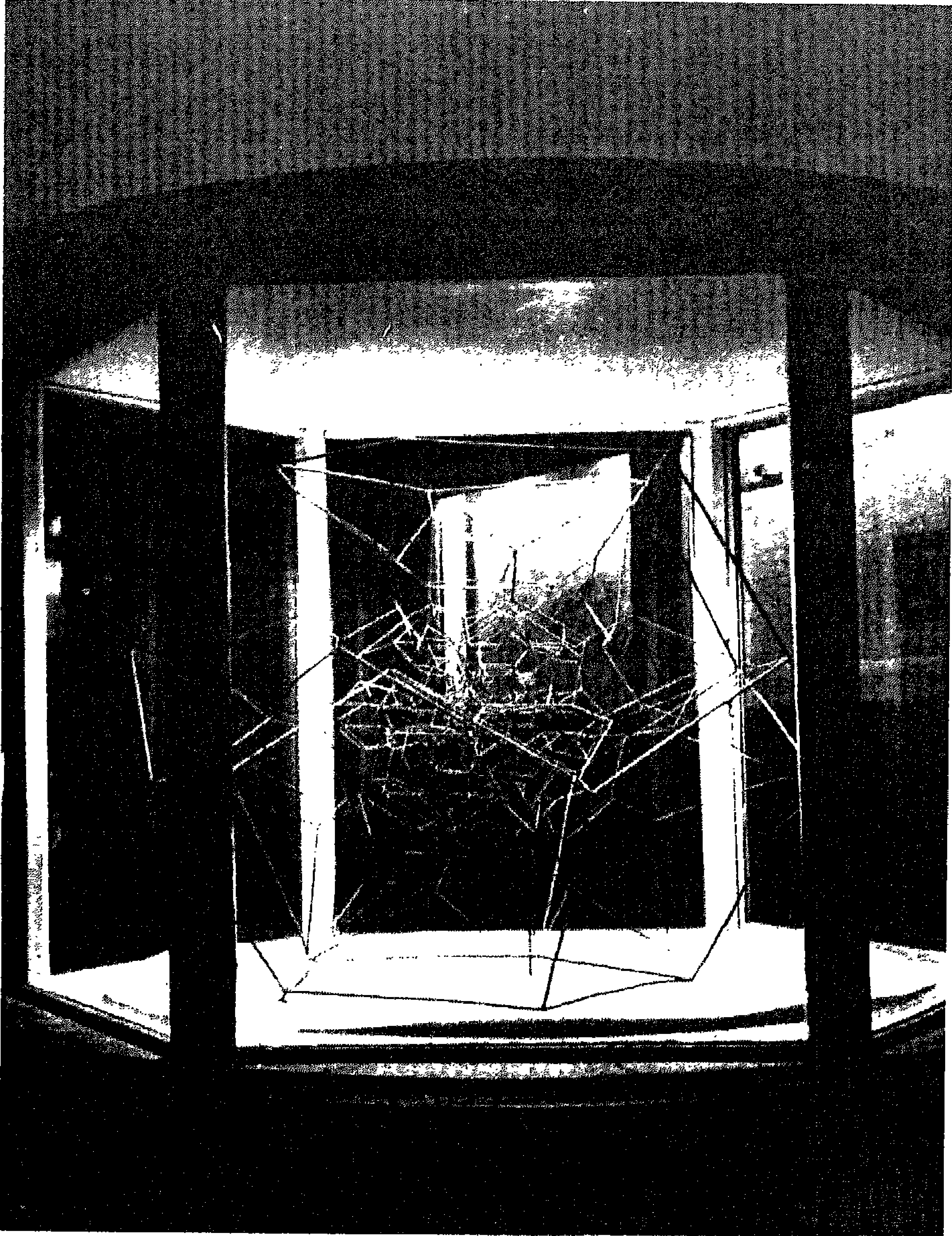
إلى الأمام أيّها المضيف الرمز.

تابع خطاك المهيبة نحو الحدود الملتهبة للزمان والمكان!

قد نعثر لك على أثرٍ في عالمنا البدائيّ ذي البعدين،

لكنّ روحك العظيمة قد ضاقت ذرعًا بعالمنا البسيط،

فازدهرت في عوالمَ كثيرة الأبعاد عديمة القيود.



نضطر عند دراستنا للهندسة الفراغية إلى تمثيل أشكالٍ ثلاثية الأبعاد على الورق أي في فضاء ثنائي الأبعاد. أما الصورة التي نراها فهي تمثيل لشكل رباعي الأبعاد في الفراغ الثلاثي الأبعاد وهذا المجسم محفوظ في متحف قصر الثقافة في باريس.

يبدو أنّ العلم والرياضيّات، بالنسبة للمشتغل فيهما، ليسا بنظريّاتهما وتشكيلاتهما مجرّد تمثيلاتٍ لحقائق معيّنة. فالمنظومة العصبيّة للعالم تتجاوز تمثيل الحقيقة إلى الحقيقة نفسها إن العالِم يحيا نظريّاته وتشكيلاته تمامًا كما يحيا كلٌّ منّا حياته الخاصّة. ولكن هل نستطيع بالأحرى فصل حياة الإنسان إلى علميّةٍ وعمليّة؟ ألا تتأثّر الثانية بالأولى بقدرٍ أو بآخر، وإذا تساءلنا في نظرةٍ مستقبليّة كيف يمكن تعميم هذه الفكرة بعد وقتٍ يطول أو يقصر، عندما تصبح الرياضيّات العليا اليوم شيئًا من أساسيّات التعليم في المراحل الأولى؟ أفلا ينعكس ذلك على حياة الناس نفسها، على الحياة اليوميّة في كلّ أبعادها؟ نتساءل أيضًا إن كان تطوّرٌ كالذي نتحدّث عنه يمثّل تفتُّحًا فكريًا وحسب. فإذا كان الإنسان سيتعامل على سبيل المثال مع الزمن كبعد رابع، أفلا يعني ذلك أن مفهوم الزمن قد تغيّر؟ أولا نكون بصورة ما قد تجاوزنا الزمن وأفلتنا من إساره؟! ألا يمكن أن نقول عندئذٍ أننا حقّقنا تطوّرًا نفسيًّا وروحيًّا؟!

سوف يجد إنسان المستقبل نفسه، وفي خضمّ الحياة اليوميّة، أمام مفاهيم ونظريّات من قبيل النسبيّة والكمّ. وقد بدأنا منذ الآن نسمع عن الحاسب الكوانتيّ كما بدأ الأميركيّون ومن قبلهم الروس بناء ما يمكن أن يتحوّل إلى قرىً فضائيّة خارج الأرض. فيما أعدّ اليابانيّون دراساتٍ علميّة متكاملةٍ لاستيطان المرّيخ. سوف نحيا إذًا في عوالم لا نستطيع بالفعل التنبّؤ بماهيتها. لكنّنا نجزم أنها تفوق عالمنا تقدّمًا بأشواط بعيدة. يشبه الفرق بين عالم الغد وعالمنا الفرق بين الأخير وبين العالم منذ بضعة آلافٍ من السنين، حين كانت الأحداث الطبيعيّة، نتاج أعمال الآلهة المختلفة

وحين كان الجنُّ والعفاريت وراء أمراض الناس وكانت الأرض محمولةً على ظهر سلحفاةٍ عملاقة! وكما نسخر اليوم من مجرّدِ فكرةِ أرض منبسطة (مستوية) فقد يسخر إنسان المستقبل من فكرة كون ثلاثيّ الأبعاد كالذي نحيا فيه اليوم. بل لقد فعل ذلك ستيفان هوكينغ S. Hawking أحد كبار الرياضيّين المعاصرين عندما قال: "*بالنسبة للجميع يصعب تخيّل كونٍ بأربعة أبعاد أما من جهتي فإنّني أجد صعوبة في رؤية الكون بثلاثة أبعاد*".

إنّنا نستطيع على كلّ حال، تمثّل الفرق بيننا وبين أسلافنا، لكنّنا نعجز تمامًا عن التنبؤ بما يمكن أن تصبحَ عليه الحال بعد آلافٍ أو مئاتٍ أو حتّى عقود من السنين. لكنّ بإمكان الرياضيّ وحده ربما استشفاف الاحتمالات المختلفة لما يمكن أن يحدث.

عودة أخرى لطرح التساؤلات: ألا يتمتّع الإنسان نفسه في العمق بقدراتٍ وملكات، بل وبطبيعةٍ أخرى أيضًا؟ فإن كنّا نستطيع فهم وتعلُّم أشياء عديدة عن عوالم لاقليدية على سبيل المثال، أفلا يعني ذلك أنّنا نمتلك طبيعةً لاقليديّة أيضًا؟ لقد مكّنتنا هندسة الكسوريّات من التعرّف بعمقٍ على طبيعةِ تركيب بعض أعضاء أجسامنا كالكلية والرئتين وجهاز الدوران وتبقى أسئلةٌ كثيرة مكان تساؤل: أيّ نوع من العوالم هو ذاك الذي تنشط فيه أدمغتنا وجملتنا العصبية ومنظوماتنا النفسيّة؟

ليس ثمّة شكّ في وجود قوانين علميّة تقوم على رياضيّات عاليةٍ ربّما لم نستطع بلوغها حتى الآن؛ تحكم نشاط منظوماتنا النفسيّة والعصبيّة. والحال فإن معرفة هذه القوانين يعني فهمًا أفضل لأنفسنا وقدرةً على

ترويضها وتوجيهها. أنّ إبداع علم نفسٍ حقيقيّ يستند على توصيفٍ رياضيّ واضحٍ ومتماسكٍ يعني دخولَ الإنسانيّة عهدًا جديدًا من التطوّر النفسيّ وكما يقول فريد آلان وولف في كتابه "مع القفزة الكموميّة". "*إنّني أرى ميكانيك الكمّ ضروريًا في تطوّر البشر وعلم النفس*" فإنّني أقول معه مكرّرًا "إني أرى الرياضيّات لا ضرورية فحسب بل ركنًا أساسيًا في تطوّر البشر وعلم النفس".

نخلص إلى استنتاج نعتبره إجابةً على السؤال الأساسيّ "لماذا الرياضيّات" وهو أنّ الرياضيّات تسهم في سيرورة تطوّرنا الخاصّ بطريقتين: بشكلٍ مباشر أوّلاً: إذ تعني دراستها وممارستها تفتّحًا للذهن وشحذًا للخيال وإيقاظًا للحدس وعن طريقِ العلم البحت ثانيًا الذي تقع الرياضيّات في قلبه والذي يحمل رسالة لا السيطرة على الطبيعة واستغلالها من أجل تحقيق رفاهيةٍ مزعومة لبني البشر بل قيادة الإنسان نحو فهم موقعه ودوره في الطبيعة والاضطلاع بهما، رسالة تحقيق القصد من الوجود الذي سمّيناه معرفة الحقيقة.

مَن القائد؟

إنّ "*العلم بناء متعدّد المظاهر*" كما يقول آينشتاين. لكنّه في الجوهر بناءٌ واحد لا يتغيّر. إنّه رياضيّاتٌ في أثواب مختلفة. إن الرياضيّات تنمو باطّراد وتحتاج في كل عام عند قدوم العيد إلى ثوبٍ جديد أكثر جمالاً وأوسع قياسًا. فتغيّر ثوبها. ونرى نحن الثوب الجديد دون أن نلحظ ما وراءه. إنّ كلّ نظريّة جديدة، في مختلف فروع العلم، إنّما تقوم على رياضيّات جديدة في قلب تصميمها.

يبدو الأمر في العلم كما لو أنّنا نراوح مكاننا. إنّنا نكتشف أو نضع نظريّة علميّة لا نستطيع أبدًا أن نثبت صحّتها بشكل نهائيّ ومطلق لكنّنا نقبل بها بقدر ما تفسّر لنا من الظواهر الطبيعيّة وعندما نكتشف ظواهر جديدة تعجز نظريّاتنا القديمة عن شرحها نصبح بحاجة إلى نظريّة جديدة أكثر شمولاً ويتكرّر الأمر مع النظريّة الجديدة أيضًا فكأنّنا ندور في حلقةٍ مفرغة لكنّ مثل هذه الصورة للواقع ناقصةٌ بعض الشيء. إنّنا ندور بالفعل في دائرة واحدة لكنَّ المستوي الذي تقع فيه هذه الدائرة ليس مستويًا ثابتًا بأي حال. إنّه مستوٍ مترفّعٌ باستمرار وبذلك يصبح مسار العلم لا دوريّاً ضمن دائرة بل حلزونيّاً في الفراغ الثلاثيّ. وإذا كنّا لا نشعر بحركة هذا المستوي الذي يتطوّر فيه العلم فلسببٍ واحد هو أنّنا جزء منه نعيش فيه ونترفّع بترفّعه. يشبه الأمر تمامًا لعبتنا مع الأرض، بيتنا الكونيّ. إنّنا لا نستطيع أبدًا الإحساس بأنّنا نبحر في الكون الرحب حول الشمس وحول المجرّة ذلك أنّنا جزء من الأرض ومن حركتها. ربّما استطعنا أن نعيَ ذهنيّاً فحسب حركةَ الأرض في الكون لكنّنا لا نستطيع أبدًا أن نشعر بهذه الحركة. ومع ذلك تتابع الأرض حركتها أو كما قال غاليليو "*ومع ذلك فهي تدور*" ينطبق الأمر نفسه على العلم أيضًا. الذي يتابع طريقه متساميًا نحو الأعلى باستمرار أما نحن فمقودون به، ونقوده، في سيرورةٍ تفتّح لا تنتهي!

هكذا يقودنا العلم في رحلة نحو الأبديّة. أمّا الرياضيّات فهي، كما أشرنا، تقوم من العلم مقام العمود الفقاريّ من الجسم ولا نستطيع أبدًا وصف نظريّة ما بالعلميّة إن لم تستند بالأحرى على بناءٍ رياضيّ. نستطيع

الذهاب أبعدَ من ذلك أيضًا. فقد يكون بالإمكان المضي قدمًا في رحلتنا العتيدة في قطار الرياضيّات المجرّدة وحدها ذلك ما يراه آينشتاين حين يكتب: *"إنّني مقتنع أنّ البناء الرياضيّ وحده يتيح لنا أن نجد المفاهيم وأن نستنبط المبادىء التي ترتبط فيما بينها، وبذلك تسنح لنا الفرصة لفهم ظواهر الطبيعة. فالمفاهيم الرياضيّة القابلة للاستعمال يمكن أن تُستوحى من التجربة، لكنّها لا تستنتج منها بحال من الأحوال. وعلى هذا الأساس وبمعنى ما، أرى أن من الحق والممكن للفكر البحت أن يستوعب الحقيقة"*.

أخيرًا وبعد كل ذلك وقبله. وإذا لم يكن كلّ ما قلناه كافيا ومقنعًا لإيضاح دور الرياضيّات وإبراز أهمّيّتها فإنّ ما هو كافٍ بالنسبة للرياضيّ هو أنّ الرياضيّات فنٌّ رفيع. وحسب ذلك سببًا للإبحار في محيطها إنّها فنٌّ بكلّ المعنى الذي تتضمنّه الكلمة وبكلّ ما في الفنون العظمى من جمالٍ وشفافيةٍ ورؤيا حتى قال أحد الرياضيّين: *"إنّ الذي لم يختبر فرح معرفة الأسرار التي تربط الرموز المختلفة وتشيد البنى المعقّدة وتحلّ المعادلات المستحيلة سواء كان لكلّ ذلك معنىً أم لم يكن، لا يمكنه أن يعي الجمال المجرّد ولا أن يعرفَ عظمة الطبيعة ولا أن يرى سطوع الحقيقة تلك الحقيقة الوحيدة الأزلية غير القابلة للتفسير أو للتعبير عنها"*.

شؤون تربويّة[1]

إنّ أيّ نوعٍ من النشاط التربويّ هو موضوعيًا نوع من العنف الرمزيّ، بوصفه فرضًا من قبل جهة متعسّفة، لتعسّف ثقافي معيّن.

بيير بورديو

يفترض واضعوا البرامج التعليميّة أنّ أحدًا لا يستطيع أن يتنبّأ بنوع الرياضيّات التي ستفيد طلابّ اليوم في مستقبلهم على النحو الأفضل. لذا يحاول المجدّدون أن يجعلوهم يضعون الرياضيّات التي يريدونها هم أنفسهم.

ديفيد برغاميني

أودُّ أن أبدأ بملاحظةٍ أساسيّة: ليس المدرّس أفضل من الآذن، ولا الطبيب أفضل من الخادم، ولا المحامي أفضل من كنّاس الشوارع، ولا مدير الشركة أفضل من العامل،... وعلينا أن نتذكّر على الدوام وأن

١- لا شكّ أنّ كوني مدرّسًا للرياضيّات في دمشق يجعلني أنطلق في حديثي من الواقع التعليمي في القطر العربي السوري. لكنّني حريصٌ مع ذلك على طرح الموضوع في أبعاده العامة. إضافةً لاعتقادي العميق بأنّ المشاكل نفسها تتكرّر في جميع الدول العربيّة كما أنّها ليست بعيدةً حتّى عن مشاكل تعليم الرياضيّات في الدول الأخرى.

نحترم على الدوام الّذين نأكلّ من عرقهم ونشرب من كدّهم ونلبس ونسكن من آوجاعهم. وعبارة "أن نحترم" لا تعني مجرّد موقفٍ متعاطف، بل تعني استعدادًا حقيقيًا أن نكون، نحن أو أولادنا منهم! وما أقوله هنا ليس موعظةً بعيدةً عن الموضوع. أقلّه إذا تذكّرنا، من جهة، أنّنا في الغالبيّة العظمى من الحالات نزرع في رؤوس تلاميذنا وأولادنا أنّ دراسة الفرع العلمي أفضل من الأدبي وأنّ دراسة الطبّ أفضل من الهندسة وأنّه خير للمرء أن يكون مهندسًا من أن يكون مدرّسًا وأن المدرّس أكثر قيمةً من العامل وأنّ العامل أهمّ من المستخدَم... وإذا تذكّرنا في الوقت عينه، من جهةٍ أخرى أنّ اختيار الفرع الذي يدرسه الطالب يتحدّد بمجموع العلامات وأن علامة مادّة الرياضيّات تشكل ربع المجموع العام في الشهادة الثانويّة فضلاً عن أنّ الكثير من العلامات يمكن أن يُفقدَ في الفيزياء والكيمياء بسبب أخطاءٍ رياضيّة. بحيث يمكن القول أنّ حصّة الرياضيّات من الدرجات في البكالوريا العلميّة السوريّة تعادل بالتأكيد أكثر من ربع مجموع العلامات. وما من شكّ في أنّ الوضع هو هو تقريبًا، في كلّ مكان يجري فيه تحديد الفرع الجامعي بناء على مجموع الدرجات في الشهادة الثانويّة.
أقول باختصار إنّ لتعليم الرياضيّات علاقةٌ وثيقةٌ بالاعتبارات الأخلاقيّة التي ذكرتُها لأنّنا غالبًا ما نجبر طلابًا لا يملكون الاستعداد الكافي لدراسة الرياضيّات على ذلك، انطلاقًا من اعتبارات ماديّة ومن معايير اجتماعيّة خاطئة. فضلاً عن ذلك، فلقد أشرتُ في مقدّمة الكتاب إلى كوني أعتبر الغاية من الرياضيّات ومن العلم ومن هذا الكتاب هي الإنسان أولاً. أمّا هذا الفصل، فهو يتحدّث عن تعليم الرياضيّات. والتعليم عمليّة متكاملة لا ينفصل فيها العلم عن الأدب عن الأخلاق... وإنّنا لَنرى بعيوننا ونسمع بآذاننا

ونتألّم في قلوبنا من المآسي التي قادنا إليها فصل العلم عن الأخلاق وعن القيم الإنسانيّة: التلوّث واللعب بالجينات واللعب بالحياة، والتفرّد بحكم العالم وفق نزوات ومصالح نفرٍ قليلٍ من البشر، إضافةً إلى تهديد التدمير الذاتيّ للبشر في حربٍ نوويّة حراريّة لا تبقي ولا تذر...

عذرًا صديقي القارئ إن كنتُ قد بدأتُ على هذا النحو العنيف. لكنك ترى معي من غير شكّ أنّ الوضع، وضع البشريّة بجملتها، يستلزم انتباهًا عاجلاً وعودةً إلى القيم النبيلة وتجاوزًا لكلّ ما نتبنّاه من مفاهيم خاطئة.

ما انفكّ الإنسان يلهث بحثًا عن "الرفاهيّة" حتّى ما عاد يدرك الفرق بين العيش الكريم وبين البطر! وحتّى نسيَ في سبيل هذه الرفاهيّة المزعومة كلّ القيم الإنسانيّة التي يُفترض أن تميّزنا عن غيرنا من المخلوقات، وحتّى نسيَ من جهةٍ أخرى أنّ ما من غنيٍّ يغتني إلا بفقر العشرات والمئات من إخوانه. نسينا قول الرسول "الخلق كلّهم عيال الله" ووصيّة يسوع "أحبّوا بعضكم بعضًا".

عذرًا مرّةً أخرى فلكلّ هذا، على ما أظنّ، علاقةٌ كبيرةٌ ومباشرة بتعليم الرياضيّات!

ذلك أنّ المدارس والجامعات، وفي كلّ مكانٍ من العالم تقريبًا، لم تعد تُعنى كثيرًا بالتعليم. وإنّي لَمسؤولٌ عمّا أقول. فالقصد من التعلّم، الذي كان في الماضي المعرفة، صار اليوم الحصول على ورقةٍ تدعى شهادة تُستخدم جواز مرورٍ إلى سوق العمل ويُفضّل بطبيعة الحال أن يكون مربحًا على أكثر نحوٍ ممكن. ولقد تواطأ الناس خفية على تقسيم الوظائف

والأعمال إلى شريفٍ وخسيس،... بحسب معايير لعلّ الشيطان وحده من وضعها! والحال فإنّ التلميذ في المدرسة والطالب في الجامعة لا يدرس كي يتعلّم بمعنى كي يعرف، كي ينمو بالحكمة والفهم، كي يكتشف مواهبه الخاصّة ويحقّقها... بل يدرس كي يتعلّم مهنةً، كي يحصل على أفضل وظيفةٍ ممكنة من حيث الدخل الماديّ والمكانة الاجتماعيّة ويؤلمني أن أكتبَ أيضًا أنّ المدرّس في المدرسة والأستاذ في الجامعة، لا يعيش، في معظم الأحوال، وظيفته كرسالةٍ لنقل معارفه وعلمه إلى الجيل الجديد، بل كعملٍ يؤدّيه مقابل راتبٍ يعيش منه وهو في أغلب الأحيان لا يكفيه.

يصعب جدّاً ضمن هذا الجو تعليم الرياضيّات! وذلك لسببين: ١- على من أراد أن يتعلّم الرياضيّات حقّاً أن يكون مستعدّاً أن لا يجني منها أقلّ فائدة. وقصّة إقليدس مع الشاب الذي جاءه سائلاً عن فوائد كتاب المبادئ باتت معروفةً لدى القارئ وإنّها لَتبقى، رغم كلّ ما يُقال، صالحةً لكلّ العصور. ٢- إنّ مسيرة التعليم هي مسيرة تمييزٍ في الآن نفسه: لم يُعطَ كلّ الناس المواهب نفسها. لنفرض أنّ فولانًا من الطلاب يتمتّع بقوّةٍ عضليّة كبيرة، لكنّه لا يملك من المواهب العلميّة الشيء الكثير. فضلاً عن أنّه يحبّ هو نفسه أعمالاً ذات طبيعةٍ يدويّة. أليس هذا ما يجب أن يحدّد بالدرجة الأولى مجال عمله وبالتالي مجال دراسته؟ ولكن ماذا لو كان هذا الطالب ابن تاجرٍ كبير أو طبيبٍ مشهور أو وزير؟ هل يليق به أن يكون "مجرّد عامل"؟ أقول: إنّ ذلك لشرفٌ له. لكنّ ما يحدث في أغلب الأحيان، وأنا أتحدّث هنا عن أشخاصٍ أعرفهم، ولا بدّ أنّ القارئ يعرف حالاتٍ

مشابهةً أيضًا، هو أن تحبو الحياة ولدًا من الأولاد موهبةً رياضيّة نادرة لكنّها تضيع لكونه مضطرًا أن يعمل في الصيف وأن يعيش ويدرس مع العديد من الإخوة في غرفةٍ واحدة وينتهي بأن يترك المدرسة ليكون على سبيل المثال نادلاً في مطعم يخدم ابن الوزير أو المحامي أو الطبيب أو التاجر الذي صار بدوره وزيرًا أو محاميًا أوطبيبًا، عن استحقاقٍ أحيانًا وعن غير استحقاقٍ في أحيان أخرى. يبقى أن أشير إلى أنّ الكثير من الأطبّاء والمحامين والمهندسين والوزراء وغيرهم من أصحاب الوظائف والمكانات الاجتماعيّة الرفيعة يشكون من تعاسة حياتهم دون أن يعرفوا السبب الذي يكون في كثير من الأحيان بسيطًا جداً: لقد خُلِقوا ليكونوا شيئًا آخر لكنّ معايير المجتمع أضلّتهم الطريق. إنّ أسطورة ابن الملك الّذي صار المهاتما بوذا تبقى مثالاً رائعًا ونبعًا ثرّاً يمكن أن يتعلّم منه من أراد التعلّم.

أعرف أنّني أطلت في الحديث. فلألخّص كلّ ذلك بكلمة: علينا، من أجل الوصول إلى تعليمٍ فعّال، أن نلفظ الكثير من قيمنا ونغيّر الكثير من معاييرنا ونهتمّ بالمواهب الحقيقيّة لأولادنا كي نساعدهم أن يصيروا ما هم إيّاه حقاً. وأنا أعرف كم يتطلّب ذلك من الشجاعة.

وماذا عن الرياضيّات؟

يطرح موضوع تدريس الرياضيّات نفسه في كلّ وقت وفي كلّ مكان، بدءاً من أسبق البلدان في التقدّم العلميّ وحتّى أقلّها نصيبًا منه. ولكن، هل يمكن طرح موضوع تدريس الرياضيّات على نحوٍ مستقلٍّ عن موضوع التعليم بمجمله؟ لا أعتقد ذلك وكلّ ما سأقوله لاحقًا لا بدّ أن يؤخذ بعين الاعتبار ضمن طرحٍ جديد لموضوع التربية والتعليم. فإذا قصرنا

الحديث على الرياضيّات تظهر طائفةٌ جديدةٌ من الأسئلة: هل المطلوب هو تعليم الرياضيّات في إطار تسهيل الاندماج بالمجتمع أم أنّ علينا أن نتساءل: أيُّ رياضيّاتٍ يجب أن تدرَّس وبأيٍّ أسلوب وضمن أيِّ اعتبارٍ للصرامة الرياضيّة؟ هل يتوجّب إعداد الطفل منذ البداية للمادّة التي يجب أن يعرفَها إذا كان سيختصّ فيما بعد بالرياضيّات أم يجب تمرينه فحسب أن يفكّر رياضيّاً بشكلٍ سليم؟ أن يستوعبَ المعلومات أم بالأحرى وبدرجةٍ أكبر أن يتعلّم فنّ التفكير؟

إنّنا لا نستطيع الإجابة عن أيّ سؤالٍ من هذه الأسئلة إن لم نناقش موضوع الأهداف التي نرجو بلوغها من هذا التعليم. كذا يختلف المنظور الذي نطرح من خلاله موضوع تعليم الرياضيّات باختلاف رؤيتنا للرياضيّات نفسها وباختلاف الغرض الذي نرجو بلوغه من خلال هذا التعليم. لذلك أسأل القارئ بعض الصبر إذ سأعود مرّةً أخرى لأتحدّث قليلاً عن طبيعة الرياضيّات إنّما بطريقةٍ أخرى. فأرى أنّ الرياضيّات هي مجموعة من المعارف والمعلومات. وأنّ الرياضيّات هي لغة عالميّة. وأن الرياضيّات هي رياضة ذهنيّة. وأن الرياضيّات هي علمٌ وفنّ.

- الرياضيّات هي مجموعةٌ من المعارف: مع أنّها ليست كذلك في الجوهر، بيد أنّه لا بدّ من أجل تحديد ما المطلوب تعليمه من الرياضيّات في كلّ مرحلة، وفي كلّ اختصاص، أن نعتبر الأمر كذلك. إنّ خواص المربّع والمثلّث والدائرة وغير ذلك من الأشكال الهندسيّة هي بعض ما يمكن أن نعتبره ضمن منظورٍ معيّن، معارف رياضيّة. إنّ معرفة واحدات الوزن وواحدات الطول والمساحة والتحويل من واحدةٍ لأخرى، الخ. هي على سبيل المثال أيضًا شيءٌ من المعارف

الرياضيّة. ثمّة حدّ أدنى من هذه المعارف لا بدّ لابن المجتمع الحديث أن يملكها. ومع ذلك فإنّ هذا الحدّ الأدنى ليس بكبيرٍ جداً على نحوٍ ما يصوَّر الأمر غالبًا: زارني صديقٌ محامٍ ذات يوم يسألني عن بعض المواضيع في أمور المساحة. كان يعالج قضيّة نزاعٍ على أراضٍ. ويبدو، على ما أذكر، أنّ هناك أخطاءً رياضيّة كانت متضمنّة في عقد بيعٍ ما بحيث أنّ واحدتي مساحة مختلفتين قد استُخدمتا في تحديد مساحة الأرض ثمّ جرى التحويل بينهما بشكل غير سليم. إضافةً إلى خلافاتٍ أخرى حول حساب مساحة الأرض نفسها لأن شكل الموقع لم يكن شكلاً منتظمًا جداً. وقد أراد المحامي أن يتأكّد من الموضوع ليحلّ المسألة فلجأ إلى صديقه المجاز في الرياضيّات. استغربت كثيرًا في حينه أنّ محاميًا يجهل مثل هذا الموضوع البسيط. لكنّني عدتُ ففكّرتُ في الأمر. لقد تدبّر هذا الصديق أمره في الرياضيّات التي لم يستطع أن يحبّها يومًا حتّى الصفّ الأوّل الثانوي، ثمّ درس البكالوريا في الفرع الأدبي ومن بعد ذلك درس الحقوق. ولا بدّ أنّه لم يتعامل منذ ذلك الوقت مع أيّ نوعٍ من مثل هذه المسائل. عندما كان صديقي المحامي يخبرني عن الموضوع، صادف وجود زائرٍ آخر لديّ. صديقٌ آخر يعمل في طلاء جدران البيوت. وقد كنتُ أعرف مسبقًا أنّه لم ينهِ المرحلة الابتدائيّة في دراسته. رأى صديقي الدهّان شكل الأرض على المخطّط وقدّم بشكل صحيحٍ ودقيقٍ الطريقة التي يجب أن تُحسَبَ وفقها المساحة بعد أن قسّم الأرض إلى مجموعةٍ من الأشكال البسيطة. وهنا أصل إلى ما أريد قوله من وراء روايّة هذه القصّة: إنّ الكثير من "المعارف الرياضيّة" هي في نهايّة الأمر معارفُ

تتعلّق بميدان عملٍ أو آخر، لقد تعلّم صديقي الدّهان حساب مساحة الجدران التي يطليها كجزءٍ من مهنته، في نفس الوقت الذي كان يتعلّم فيه خلط الطلاء واستعمال الفرشاة... يتعلّم الأطفال في المرحلة الابتدائيّة واحدات القياس. كما يتعلّمون حساب مساحات الأشكال المختلفة. يتّخذ هؤلاء الأطفال بعد وقت اتّجاهات مختلفة في الحياة. إنّ الذين يتخصّصون ويعملون فيما بعد في مجالاتٍ تَلزَمُهم فيها هذه المعارف سيتذكّرونها دومًا أو قد يتعلّمونها من جديد. أمّا معظم الّذين لا يستخدمون هذه المعارف لأوقات طويلة فسينسَونَ الكثير منها. أخلُص إلى القول، إنّ "المعارف الرياضيّة" لا تحمل أهميّة كبرى كمعارف رياضيّة نعتقد أنّ المتعلّم سيذكرها على الدوام. بل إنّ معظم هذه المعارف يمكن أن يتعلّمها المرء من خلال تعلّمه لمهنةٍ معيّنة بغضّ النظر عن انتمائها لميدان الرياضيّات أم لا. لكنّ هذا لا ينفي من جهةٍ أخرى أهميّة هذه المعارف كونها ضرورة مرحليّة في تعلّم الرياضيّات بمعنى، أنّ على المتعلّم أن يمتلك شيئًا من هذه المعارف من أجل المضيّ في تعلّم الرياضيّات مع أنّ نسيان هذه المعارف بعد ذلك ليس بأمرٍ خطيرٍ أبدًا. إنّ معرفة حقائق الهندسة المستويّة أمرٌ ضروريٌّ من أجل تعلّم الهندسة الفراغيّة وهذه الأخيرة هي مرحلةٌ يقطعها المتعلّم الّذي قد يحمل فيما بعد شهادة دكتوراه في الرياضيّات. ومع ذلك يمكن للعاملين في مجال المساحة أو لأمناء المستودعات مثلاً أن يعرفوا عن ظهر قلب الدساتير الخاصّة بمساحات الأشكال المستويّة أو أحجام الأشكال الفراغيّة أكثر من أساتذة الرياضيّات الجامعيين. إنّ المعارف الرياضيّة في نهايّة الأمر، ما دمنا ننظر إليها كمعارف

وحسب، تنتمي إلى خصوصياتِ عمل أو مهنةٍ محدّدين أكثر ممّا تنتمي إلى الرياضيّات. ويضعنا هذا من جهةٍ أخرى أمام اعتبارٍ هامّ يتعلّق بالتمييز بين التأهيل الرياضيّ اللازم للقيام بعملٍ معيّن (تأهيل المهندس مثلاً) وبين تعليم الرياضيّات. فحيث يهتمّ المهندس بالدرجة الأولى بخوارزميّات حلّ طائفةٍ من المعادلات التفاضليّة، يهتمّ الرياضيّ بنظريّة المعادلات التفاضليّة ككلّ وبشروط وجود الحلّ وبإبداع طرق جديدةً للحلّ. وباختصار، بالمعنى المجرّد للمعادلة التفاضليّة. إنّها ملاحظةٌ عابرةٌ أسجّلها هنا (مع أنّي أريد أن أركّز بالأولى على تعليم الرياضيّات في المدارس) وهي أنّه كثيرًا ما يجري تقديم الرياضيّات، في أقسام الرياضيّات في كثيرٍ من الجامعات، كما لو أنّها تُقدّم لأشخاصٍ سيعملون في مجالٍ أو آخر من المجالات التطبيقيّة للرياضيّات بحيث تُغيَّب الفكرة الرياضيّة على حساب التفاصيل الأقلّ أهميّة.

- لغةٌ عالميّة: بل ربّما لغةٌ كونيّة أيضًا! فعلماء الفلك الّذين يأملون بإمكانيّات اتّصالٍ مع حضاراتٍ كونيّة لا أرضيّة، إذا كانت موجودة، يعتقدون أنّ اللغة الرياضيّة هي أفضل ما يمكن أن يتفاهم من خلاله كائنان ذكيّان لا لغة مشتركة بينهما. لقد أطلق هؤلاء العلماء على سبيل المثال رسائل راديويّة تتضمّن متتالية الأعداد الأوليّة وبما أنّ هذه الأعداد هي هي مهما اختلف نظام العدّ... ومهما اختلفت طريقة التعبير عنها فلا بدّ أن تُفهَمَ إذا ما وصلت إلى كائناتٍ ذكيّة ما. فإذا حدث أن تلقّينا على الأرض بواسطة المراصد الراديويّة الموجّهة

التي تنتظر رسائل محتملة موجاتٍ تمثّل متتالية الأعداد التي تزيد عن الأعداد الأوليّة بواحد. فإنّ أفضل التفسيرات الممكنة هي أنّ كائناتٍ ذكيّة قد التقطت رسالتنا وردّت عليها بما يشير إلى فهمها لها. بعد ذلك ستنشأ مراسلةٌ يتمّ عبرها تبادل معلوماتٍ رياضيّة يمكن أن تثمر عن صياغة لغةٍ مشتركة! بيد أنّ الرياضيّات هي لغةٌ عالميّة على المستوى الأرضيّ أيضًا. إنّنا، وبكلّ بساطةٍ، نستخدم لغة الرياضيّات في كلّ مرّة نطلب فيها رقم هاتفٍ معيّن أو نولّف جهاز استقبالٍ ما. نلاحظُ مرّةً أخرى هنا أنّ تعلّم لغة الرياضيّات، أو تعلّم مبادئها البسيطة على الأقلّ، يتمّ على صعيد الحياة ومن خلال الخبرة العمليّة أكثر ممّا يتمّ من خلال المدرسة أو الجامعة. أي من خلال التعليم بمعناه الرسميّ. إنّ تعلّم لغةٍ يعني بادئ ذي بدء تعلّم أبجديّة ومن الأكيد أنّ تعلّم أبجديّة الرياضيّات، التي منها التكامل والتفاضل والمجموع والمشتقّ، الخ.. لا يمكن أن يتمّ في الصغر. لكنّنا نستطيع مع ذلك أن نعلّم الأطفال بعض المفاهيم الهامّة من أبجديّة الرياضيّات ولا سيّما من ميدان لغة المجموعات. يمكن من خلال ألعابٍ بسيطة أن يستوعب الطفل بعمق مفاهيم الاجتماع والتقاطع والانتماء كما تشير إلى ذلك صورة غلاف هذا الكتاب. وهنا أستطيع أن أسجّل ملاحظةً ستتكرّر لاحقًا وهي أنّ اللعب يمكن أن يكون الوسيلة الأفضل لتعليم الكثير من المفاهيم الرياضيّة ولفترةٍ طويلةٍ من السنوات.

- رياضةٌ ذهنيّة: أعتقد أنّ هذا الاعتبار للرياضيّات هو الأكثر أهميّة بين الاعتبارات ولا سيّما بالنسبة للصغار. إنّ الشخص الذي تنمو لديه

القدرات الذهنيّة على نحوٍ كافٍ دون أن يعرف الكثير جداً من المعلومات الرياضيّة، أكثر قدرةً على متابعة دراسة الرياضيّات من آخر يحفظ الكثير من المعلومات الرياضيّة ولا يملك التمرين الذهنيّ الكافي على معالجتها . وعلى هذا الصعيد فإنّ الرياضة الذهنيّة لا تنحصر فحسب في الرياضيّات بالمعنى الضيّق للكلّمة فلعبة الشطرنج على سبيل المثال هي لعبة مليئة بالفائدة ووسيلةٌ جيّدة لرياضة الذهن. أمّا إذا أردنا البقاء في مجال الرياضيّات فثمّة الكثير من الألعاب والتسليات والمسابقات ذات الطابع الرياضيّ التي يمكن أن تقدّم فائدةً جزيلة دون أن تشكّل ضغطًا كبيرًا على التلميذ أو الطالب إضافةً إلى أنّ الكثير من الألعاب والتمارين الأخرى الجديدة يمكن أن تبتكر خصّيصًا لإيصال فكرةٍ رياضيّة أو أخرى.

- علمٌ وفنّ: إنّ حقيقة كون الرياضيّات علم وفنّ هي أمر يحسُنُ أن يكون معروفًا لدى المتعلّم. وعلى نحوٍ أدقّ يجدر بنا البحث عن الوسائل القمينة بجعل التلميذ يكتشف جمال الرياضيّات ومكامن الفنّ فيها. يجدر بنا ألا نعلّم الرياضيّات كمادّة مجرّدة "نفهم لاحقًا" تطبيقاتها وأهميّتها. بل كفنٍّ ينطوي على الكثير من الجمال. إنّ طريقة الألعاب والتسليات الرياضيّة تلعب دورًا هامّاً هنا أيضًا وسنعود للحديث عن هذا الموضوع لاحقًا.

التمثّل بالتاريخ

تكاد المدارس المختلفة لعلم النفس الحديث تجمع على اعتبار الجنين البشريّ يعيد في رحم الأمّ عيش جميع المراحل ما قبل البشريّة التي قطعها

أفراد الجنس الآدميّ في طريقهم إلى ما هم عليه اليوم. واستكمالاً لهذه النظرة يمكن أن نفكّر أنّ الطفل الصغير يقطع جميع المراحل التي عاشها إنسان ما قبل التاريخ مرورًا بالانتصاب على القدمين ووصولاً إلى تعلّم العدّ وتعلّم اللغة. نستطيع الآن أن نطرح فكرةً تبدو لي على غاية كبيرةٍ من الأهميّة. أن يجري تعليم الرياضيّات على نحوٍ يتناغم مع الصيرورة التاريخيّة لنشوء الرياضيّات وتطوّرها. أستطيع أن أطرح هنا مثالين مختلفين أوّلهما شاملٌ نسبيّاً والثاني أكثر تحديدًا.

المثال الأوّل: يتعلّم التلاميذ في الصفوف الإعداديّة الهندسة المستوية وبمعنًى آخر يدرسون كتاب المبادئ لإقليدس مع اختلافٍ نوعًا ما في اللغة المستخدمة. أي باستخدامٍ محدودٍ وغير كامل للغة المجموعات. أريد أن أركّز أكثر على الطريقة التي يجري بها تدريس هذه المادّة. فبعد شرحٍ سريعٍ، أستطيع أن أقول انطلاقًا من خبرتي المتواضعة في التعليم أنّ معظم الطلاب لا يفهمونه، لمعنى الموضوعة والنظريّة ونظريّة العكس والتعريف... وبعد أن يُعطَى الطلاب موضوعات الهندسة الإقليديّة تتوالى الدروس على نحوٍ رتيبٍ دون إيضاحٍ كبيرٍ لارتباطها ببعضها بعضًا. ويبدأ كلّ درسٍ بتعاريف ثمّ "نظريات" (والمقصود هو مبرهنات) ثمّ نتائج مع تمارين ومسائل مختلفة بطبيعة الحال...

الحقيقة التاريخيّة المعروفة تمامًا والتي حاولت إيضاحها في الفصول الأولى من هذا الكتاب هي أنّ "مبادئ" إقليدس لم يظهر من العدم. إنّه تلخيصٌ لعمل عشرات علماء الرياضيّات الإغريق خلال ما يقارب الأربعمائة عام. أمّا أعمال هؤلاء الرياضيّين فهي كما سبق أن قلنا أيضًا تتويجٌ لخبرة ألفي عام من التعامل الواقعيّ مع الأشكال ومع حسابات المساحات والحجوم.

صحيحٌ أنّ التلاميذ في المرحلة الابتدائيّة (والتي دُمجت اليوم مع المرحلة الإعداديّة في مرحلة التعليم الأساسيّ) يتعاملون كثيرًا مع الأشكال الهندسيّة ويتعرّفون إلى الكثير من خواصها ويحسبون مساحاتها... لكنّ ما أقترحه هو أمرٌ آخر: أن يعيد التلاميذ خلال المرحلة الإبتدائيّة اكتشاف الهندسة بطريقةٍ تحاكي ما فعله المصريّون والبابليون. وأن يعيدوا لاحقًا فيما بعد *بناء الهندسة* بالطريقة التي فعلها اليونانيون. يعني ذلك عمليّاً أن تُطرَح على التلاميذ الصغار مسائل من قبيل حساب المساحات وأن يُترك لهم أمر البحث عن الحلول وأن يقيسوا بأدواتٍ خاصّة مساحات بعض الأشكال وأن يُترك لهم استنباط قوانين تقريبيّة وصولاً إلى القوانين الصحيحة. لنفرض كمثالٍ على ذلك أنّنا طلبنا من صفٍّ يضمّ عشرين تلميذًا (وعلى مدى فترةٍ زمنيّة كافية) أن يرسم كلاًّ منهم مثلّثًا بعد أن أعطيناهم أطوال الأضلاع المطلوبة. بعد التأكّد من أنّ كلّ واحدٍ منهم بات قادرًا على رسم مختلف أنواع المثلّثات بطريقته ولو على نحوٍ غير دقيقٍ كليّاً. نطلب منهم رسم مثلّثٍ أُعطِيت أطوال أضلاعه على نحوٍ خاطئ (3, 5, 9) مثلاً ومن الطبيعي أنّ مثل هذا المثلّث غير موجود. بعد الكثير من المحاولات الفاشلة، وبعد الكثير من التمارين المشابهة (أي بتغيير الأرقام المعطاة) سوف يدرك معظم الطلاب، على نحوٍ غامضٍ أقلّه، حقيقة العلاقة بين مجموع أو فرق طولي ضلعين وطول الضلع الثالثة التي يجب أن تتوفّر من أجل رسم المثلّث. وسيوضح لهم المدرّس ما أدركوه ولم يستطيعوا التعبير عنه. يُطرَحُ السؤالُ بعدئذٍ: ولكن قد نجد ثلاثة أعداد بحيث يكون مجموع اثنين منها أصغر من الثالث وتصلح مع ذلك لرسم مثلّث. فنحن لم نستعرض

بعد كلّ الاحتمالات الممكنة. هنا يجد الطلاب أنفسهم أمام ضرورة البرهان وحينئذٍ فقط سيفهم الأغلبيّة من بينهم ويعمق معنى البرهان الرياضيّ. الذي سيأتي دوره لاحقًا في المرحلة الإعداديّة. بعد مناقشة عددٍ من القضايا وفق هذه الطريقة (في الصفّ السابع مثلاً) نعود في الصفين الثامن والتاسع إلى إعادة ترتيب هذه القضايا، مع قضايا أخرى جديدة في البناء الهندسي الذي وضعه إقليدس وما أظنّه هو أنّ فكرة البناء شديدة الأهميّة هنا وهي تساعد التلاميذ على الفهم المبكّر، إلى حدٍّ ما على الأقلّ، لمعنى البنية الموضوعاتيّة والأهمّ من ذلك هو أنّ هذه الطريقة في طرح المنهاج، بشكلٍ عام، تقدّم وسيلةً فعّالة لجعل التلاميذ فعّالين في التعلّم لا متلقّين سلبيين وهي المشكلة التي لم نستطع تجاوزها حتّى الآن.

لا يخفى أنّ مثل هذا الاقتراح، الذي يحتاج في جميع الأحوال إلى دراسةٍ مفصّلةٍ آمل أن تتاح لي، أو لمن يرى في ذلك فائدةً، الفرصة للقيام بها (وهي دراسةٌ قد تحتاج لعمل عدّة أشخاصٍ معًا) يحتاج إلى أشياء كثيرة تدعمه: صفوفٌ نموذجيّة لا يزيد عدد الطلاب فيها عن عشرين طالبًا كحدٍّ أعلى. معلّماتٌ ومعلّمون يملكون التدريب الكافي من الناحيتين العلميّة والتربويّة، إذ من الأكيد أنّ صفاً يجري فيه التدريس بهذه الطريقة لن يكون صفاً هادئًا الأمر الذي نظنّه الحالة المثاليّة، وسائل تعليميّة غير تقليديّة، أشكالٌ هندسيّة من الورق المقوّى أو من الإسفنج ومقصٌّ وأدوات لصقٍ على سبيل المثال... إضافةً إلى الورق والقلم والأدوات الهندسيّة التقليديّة. مجالٌ واسعٌ من الحريّة للمدرّس وهو سلاحٌ ذو حدّين كما نعلم. وقد يتطلّب الأمر أيضًا أن يرافق المدرّس نفس الطلاب لعدّة أعوامٍ متتالية

وأن يَجري تنسيقٌ كبيرٌ بين مدرّس الصف والمدّرس الجديد عندما يتغيّر الأوّل... وهذه النقطة ضروريّة لا لأنّ المدرّس يتابع تطوّر تلاميذه ويكون مسؤولاً عنهم فحسب بل لأنّ مسيرة التعليم هي مسيرة تمييزٍ في الوقت نفسه وهذا أمرٌ سبق أن أشرت إليه وقد أعود إليه لاحقًا. إنّ مثل هذه الطريقة في طرح المادّة مع وجود مدرّسٍ خبيرٍ يتابع تلاميذه لأكثر من عام يتيح الفرصة بشكل كبير لتمييز المواهب الخاصّة والتي سيتطلّب الأمر عندها أن توجّه وتُدعَم... أعيد القول أنّ مثل هذا الطرح يتطلّب دراسةً أكثر عمقًا وتفصيلاً لكنّني أصرّ في الوقت نفسه على أنّ أنظمة التعليم والمناهج تحتاج إلى تعديلاتٍ جذريّة إن لم أقل إلى ثورة! المشكلة هي أنّنا غالبًا ما نقتدي بمناهج أجنبيّة مع إدخال بعض التعديلات غير الجوهريّة عليها. في حين أنّ المختصّين في البلدان التي نعتبرها متقدّمة يعرفون أنّ مناهجهم وأساليبهم تشكو الكثير من السلبيات. وحول هذا الموضوع أذكر المثال البسيط التالي:

كنتُ أتحدّث منذ بضعة أيّامٍ مع زميلةٍ من مدرّسات الرياضيّات. أعربتُ عن استغرابي من كون تعليم الأطفال قراءة الساعة ذات العقارب ما زال درسًا مطروحًا في مادّة الرياضيّات في المرحلة الابتدائيّة في حين أنّ معظم الأطفال يعرفون ذلك قبل الوصول إلى هذا الدرس. أجابتني محدّثتي، المطّلعة على نحوٍ أفضل منّي على مناهج أجنبيّة، بأنّ المناهج العالميّة في الدول الغربيّة المتقدّمة تفعل الشيء نفسه. أقول: ربّما أنّ الأهل في تلك الدول لا يعلّمون أولادهم مثل تلك الأمور فمن الطبيعيّ أن يتعلّمها الطفل في المدرسة. وربّما، وهذا هو الاحتمال الأكبر، أنّ مثل هذه الفقرة من المنهاج ما زالت موجودةً لأنّ أحدًا لم يفطن، وبكلّ بساطة، إلى أنّها باتت من

مخلّفات الماضي. تمامًا كالصورة المعلّقة على حائطٍ وقد تراكمت عليها طبقات الغبار. فلماذا لا نفطن نحن قبل الغرب؟ منذ عشرين عامًا كانت الساعة هديّةً كبيرةً تقدّم للطفل في أحسن الأحوال عند إنهائه للمرحلة الابتدائيّة. أمّا اليوم فبإمكان كلّ طفلٍ في الخامسة من العمر أن يحمل ساعةً رقميّة أو ذات عقارب. وسرعان ما يتعلّم قراءتها بمساعدة إخوته أو أصدقائه أو والدته... فلماذا تضييع الوقت في المدرسة؟

المثال الثاني: لن أطيل. إنّه موضوع طرح فكرة الأعداد العقديّة. فهذا الموضوع يُطرح في كتاب البكالوريا على النحو التالي: "... هناك معادلاتٌ مستحيلة الحلّ في مجموعة الأعداد الحقيقيّة مثل المعادلة $x^2 = -1$ وللتغلّب على هذه المشكلة قام الباحثون بإحداث ما سمّي بالوحدة التخيّليّة للتعبير عن عدد مربّعه يساوي 1- واستخدموا الرمز i للدلالة عليه..."

يمكن للقارئ أن يراجع هنا الملحق المتعلّق بقصّة الأعداد العقديّة. حقيقة الأمر أنّه لم يكن هناك ما يدعو بإلحاح لإحداث الوحدة التخيليّة ولحلّ المعادلة $x^2 = -1$ أو سواها. بيد أنّ جذور الأعداد السالبة قد ظهرت على نحوٍ طبيعيّ أثناء تطبيق صيغة كاردانو لحلّ بعض معادلات الدرجة الثالثة أمّا إحداث الوحدة التخيليّة فقد أجراه الرياضيّون بتحليل العدد المجذور فعندما كان يظهر لديهم $\sqrt{-25}$ مثلاً كانوا يكتبونه $\sqrt{-1\times 25} = 5\sqrt{-1}$ وبهذه الطريقة يختزلون جميع الجذور السالبة إلى الوحدة التخيليّة.

أعتقد أنّ الدخول إلى موضوع الأعداد العقديّة بالطريقة التي طرحتُها في الملحق المذكور تقدّم الفوائد التالية:

١) تعطي فكرةً أقرب بكثير إلى الحقيقة التاريخيّة.

٢) إنّه الوقت المناسب، على ما أظنّ، كي نقدّم للطالب، الّذي غالبًا ما يتخرّج من الجامعة (مهما كان الفرع الذي يدرسه حتّى ولو كان الرياضيّات) دون أن يعرف إن كان هناك صيغةً عامّة لحلّ المعادلات من الدرجة الثالثة أم لا، قانونَ حلّ هذه المعادلات (صيغة كاردانو) وهو ليس بالأمر المعقّد أبدًا. وحتّى لو كان تطبيق هذه الصيغة في حلّ المعادلات نادرًا. فالأهميّة الكبيرة لهذا الدستور تكمن في وجوده أكثر مما تكمن في تطبيقه.

٣) لنلاحظ إنّ قولنا بأنّ اختراع الوحدة التخيليّة في سبيل حلّ معادلات الدرجة الثانيّة ليس بالأمر المقنع. فهو لا يجيب على السؤال حول ضرورة حلّ هذه المعادلة فهي معادلةٌ مستحيلة وممّا يزيد الأمر تعقيدًا أن نخترع الوحدة التخيليّة لنحلّ معادلةً مستحيلة. وسيبقى ثمّة شيء غير مفهوم وسيبقى لدى الطالب شعورٌ بأنّ شيئًا غير مبرّرٍ قد فُرِض عليه. في حين أنّ ظهور جذور الأعداد السالبة عند تطبيق قانونٍ رياضيّ أوجدناه (وهو قانونٌ فعّالٌ في حلّ الكثير من معادلات الدرجة الثالثة دون ظهور الجذور السالبة) ثمّ استخدامها (أي الجذور السالبة) في حلول معادلات الدرجة الثانيّة بعد أن عرّفنا عليها العمليات اللازمة سيبدو أمرًا منطقيًا جدًا ولن تظهر الرياضيّات بمظهرٍ بعيدٍ عن متناول الفهم ولن يظهر علماء الرياضيّات الذين وضعوا الأعداد العقديّة بمظهر أناسٍ يعيشون في عالمٍ آخر أو يبتكرون أشياء لا يعرف أحدٌ من أين تأتي إلى أذهانهم.

التحليليون والتركيبيون...

ونستطيع أن نقول أيضًا ، الجبريون والهندسيون، أو المنطقيون والحدسيون... يملك البعض موهبة الرؤيّة الشموليّة. إنّهم يستطيعون أن يلحظوا الأفكار العميقة بسرعةٍ كبيرة ويستطيعون إيجاد حلولٍ سريعةٍ لمسائل مستعصية بطرق مبتكرة. لكنّهم في غالبيّة الأحيان لا يملكون الصبر أو الجلَد الكافيين للتعبير عن أفكارهم أو لبرهانها. وهنا يأتي دور الفئة الأخرى، والتي يشكلها أشخاصٌ أكثر منهجية وأكثر حباً للعمل في التفاصيل، وأكثر قدرةً على التجريب والفشل وإعادة التجريب وأكثر خبرةً في استخدام المعارف المتوفّرة لبرهان صحّة أو خطأ نظريات جديدة.

ينطبق هذا التقسيم على المتعلّمين أيضًا ومنذ الصِغَر. ويزداد وضوحًا مع تقدّم العمر والدراسة. تبدو الكثير من المسائل أو المبرهنات بديهيّة بالنسبة لأصحاب الاتّجاه الحدسي. فهم في كثير من الأحيان لا يفهمون أو لا يتابعون المواضيع الجديدة بسبب عدم اهتمامٍ وليس بسبب قصورٍ حقيقيّ. لكنّ عدم الاهتمام هذا ، الذي مردّه اعتبار الأمر طبيعياً بالنسبة لهم، يمكن أن يؤدّى إلى تقصيرٍ يؤخّر تقدّمهم. يستطيع الطالب ذو الفكر الهندسي على سبيل المثال أن يجد الجواب الصحيح للكثير من مسائل الاحتمالات بطريقةٍ حدسيّة ودون الاعتماد على القوانين المعنيّة. لكنّه يمكن أن يخطأ أيضًا في أحيان كثيرة. يميل الطلاب من مثل هذه الفئة (وهي الأقلّ عمومًا) إلى عدم تعلّم الطرق العامّة في الحلّ وليس ذلك بسبب صعوبة هذه الطرق، فهم قادرون عمومًا على تجاوز هذه الصعوبة. بل بسبب عاملٍ نفسيّ يجعلهم يعتقدون دون أن يعَوا ذلك كثيرًا بأنّه ما من داعٍ لتعلّم هذه الطرق "السخيفة"! على المدّرس أن ينتبه كثيرًا لهذه الناحيّة لأنّ تقصير طالبٍ كان يمكن أن يصبح متفوّقًا جداً ، يمكن أن يبدأ من هنا. في المقابل، يركّز معظم الأساتذة على الطرق العامّة ويرفضون قبول الطرق المباشرة والمبتكرة طالما انّها لا تنجح دائمًا. وطالما انّها صعبة الفهم على الكثير من الطلاب الآخرين. ومع ذلك فأنا أعتقد انّ العمل على تنميّة المواهب الحدسيّة هو أمرٌ ضروريّ جداً باعتبار انّ الفكر الحدسيّ أقدر على الفهم الشموليّ للمادّة التي يدرسها الطالب ولارتباط النظريات المختلفة ببعضها بعضًا. بل لفهم الرياضيّات ككلّ. هنا أيضًا نواجه صعوبة كون معظم المدرّسين هم تحليليون أكثر مما هم تركيبيون. الأمر الذي يزيد من صعوبة المهمّة.

دور الحبّ

في البدء كان الحب، والحب تمخض فولد الفكر.

رج فيدا .

أكتبُ هذه الصفحات في وقتٍ نعيش فيه ويعيش كلّ المجتمع، همّ وهاجس امتحانات الشهادتين الإعداديّة والثانويّة. وتتردّد في أواسط الطلاب وذويهم وفي كلّ مكانٍ واجتماع كلمة "رياضيّات" منطوقةً بلهجة العداء وممزوجة بمشاعر الخوف والقلق في غالب الأحيان.

ليست الرياضيّات مادّة محبوبةً بشكلٍ عام والحال فإنّ صعوبتها ستبقى أبداً عائقاً في وجه الطلاب. ذلك أنّ الحبّ شرطٌ رئيس للمسير في درب الرياضيّات. وتؤكد الخبرة الحياتيّة على أهميّة هذا العامل (الحب) في كلّ مجالات الحياة ولنحصر حديثنا بالتعليم: عندما نسألُ طالباً، لماذا لا تدرس الرياضيّات (أو لماذا أنت ضعيفٌ في الرياضيّات) نجد أنّ الإجابة الأكثر تكراراً من كلّ الإجابات الأخرى "لا أحبّها" وفي الدرجة الثانيّة من تكرار الإجابات نسمع عبارة "لا أحبّ الأستاذ أو الآنسة" وعلى العكس نجد الطالب المتفوق في الرياضيّات يؤكّد شديد حبّه وولعه بهذه المادّة ونراه يدرسها حتى بغضّ النظر في كثير من الأحيان عن اهتمامه بالعلامات.

أردت أن أطرح العلاقة بين حبّ المادّة وإمكانيّة المثابرة على دراستها (و أيضًا بين حبّ المدرّس للمادّة ونجاحه في تدريسها) لما أقيمه من أهميّة بالغة لهذا الموضوع. ذلك أنني أعتبر المحبّة أساس كلّ عملٍ ناجح. فأرى أن

محبّة الرياضيّات هي إذاً ضرورةٌ أساسيّة لمن يريد أن يتعامل معها بسلام، أن يدرسها ويتقدّم فيها باستمرار أو يتّخذها واسطةً في إتمام عمله. للطالب الذي يدرسها وللمعلّم الذي يدرّسها وللمهندس أو التقانيّ الذي يستخدمها في تطبيقاته المختلفة.

وإذا كنا نتحدّث عن العلاقة بين حبّ الرياضيّات ودراستها فإن أسئلةً عديدة تُطرح هنا:

السؤال الأول: ما الذي يجعل مادّة الرياضيّات تحديداً محبوبةً عند طالبٍ أكثر من آخر؟ هل يتعلّق الأمر بالمادّة نفسها أم بتكوين الطالب (النفسيّ، الاجتماعيّ، الوراثيّ..الخ) أو يمكن أن يتعلّق الأمر أيضاً بظرفٍ خاصّ يحدّد توجّه الشخص؟.

لاشكّ أنّ هناك ما يُسمّى الموهبة وهي تلعب دوراً كبيراً في دفع الطفل لمحبّة الرياضيّات. بيد أنّ توفُّر الموهبة ليس أمراً خاصّاً أو استثنائيّاً كما يسود الرأي. بل هي الحالة الطبيعيّة عند كلّ طفل. تماماً كما نستطيع القول إنّ حبّ الرياضيّات هو الأمر الطبيعيّ والأوّليّ. إنما يمكن أن يغيب هذا الحبّ، كما تغيب الموهبة، مع نمو الطفل، نتيجة ظروفٍ وعوامل مختلفة هي جزء من محيط الطفل ومن طريق نموه.

يرى بيير داكو P. Dacko أحد كبار علماء النفس المعاصرين في فرنسا، أنّ الطفل يولد مزوّداً بجميع المواهب الممكنة (الشعر، الموسيقى، الرياضيّات..الخ) وأنّ مؤثّرات البيئة والمحيط تحدُّ شيئاً فشيئاً من هذه المواهب إلى الحد الذي نظنّها لم تكن. وفي أحيان قليلة تفلت إحدى هذه المواهب (أو أكثر) وتلقى ظروفاً ومناخاً يساعدانها أن تنمو وتتفتّح. ولكن،

حتّى الموهبة (الكبيرة) والمميّزة قد تخبو وتنطفئ إن لم تلقَ الجوّ المناسب لنموّها. أعتقد أنّ داكو محقٌّ إلى حدٍّ بعيد وإن ليس على نحوٍ مطلق. فلا شكّ أنّ كلّ طفلٍ يملك مع ذلك مواهبه الخاصّة منذ نعومة أظفاره فالظروف التي تؤخّر تفتّح المواهب وتقضي عليها يمكن أن تؤثّر منذ ما قبل الولادة وهذا ما يقوله علم النفس أيضًا.

زيادةً في الإيضاح يطرح داكو المثال التالي: يمكن أن نشبّه نفس الطفل بأرضٍ أُلقيت فيها بذورٌ مختلفة. إنّ هذه البذور ستبدأ بالنموّ معًا بدرجةٍ أو بأخرى لكنّ الظروف الخارجيّة من جهة كحرارة المنطقة أو برودتها ورطوبتها أو جفافها وارتفاعها عن سطح البحر أو انخفاضها وتوفّر مياه الريّ أو شحّها... والظروف الداخليّة من جهةٍ أخرى كطبيعة التربة مثلاً... ستلعب دورًا مهماً في توقّف نموّ بعض الأنواع واستمرار أخرى. حتّى أنّه لا بدّ في كثيرٍ من الأحيان من التضحيّة ببعض النبتات الصغيرة من أجل الفوز بالأخرى. وهذه الفكرة شديدة الأهميّة لأنّها تتطلّب الكثير من التمييز من قبل المعلّمين والأهل معًا والكثير من الشجاعة من قِبَلِ الأهل بالدرجة الأولى.

كذا يجب مراقبة مواهب الطفل بعنايةٍ بالغة، وتمييز مواهبه الأكثر بروزًا. وتقديم كلّ ما يساعده على تفتّح كافّة إمكانياته. بيد أنّه لا بدّ من التضحية بأشياء عديدة في بعض الأحيان. الأمر الأكثر أهميّةً وصعوبةً في نفس الوقت هو ألا نصنّف المواهب المختلفة في حسنٍ وسيّئ. فليست الموهبة العلميّة أفضل من الأدبيّة وليست الموهبة الفنّيّة في الموسيقى أو الرسم أو غير ذلك أفضل من الرياضيّة (البدنيّة). يحبّ بعض الأطفال الحيوانات على

نحوٍ استثنائي مثلاً فما من بأسٍ في أن يوجّه هؤلاء ليكونوا بيطريين على سبيل المثال... وكم من أشخاصٍ حُرموا تحقيق مواهبهم بسبب الصعوبات التي واجهتهم في مواد أخرى ولا سيّما الرياضيّات. فلنعد إذاً إليها.

يتوجب أن يتوفّر اهتمام كبير في المرحلة الأولى من عمر الطفل سواء في تعلّمه بعض الأشياء في البيت أو في سنواته الدراسيّة الأولى. يجري التركيز عادةً في هذه السنوات على تعليم الطفل المعارف الرياضيّة الأساسيّة والتي لابدّ من تعلّمها عاجلاً أو آجلاً (العدّ، العمليات الأساسيّة وخوارزمياتها، الكسور.. الخ) ونتوقف هنا عند النقطتين التاليتين:

١- ليس المطلوب أن ندفع الطفل ليحبّ الرياضيّات فذلك هو الحال الطبيعي إنّما علينا أن ننتبه بقدر ما نستطيع لكلّ ظرفٍ مهما كان صغيراً يمكن أن يولّد النفور من الرياضيّات أو التراجع في تعلّمها، ولنتأمّل مثالين مأخوذين من الواقع:

- طفل بين الثانية والثالثة من العمر وفي بداية تعلّمه. يتعلّم العدّ حتى العدد 10. يحبّ والداه أن يفتخرا به أمام أصدقائهم وزوّارهم، وهم كثيرون، يطلبون إليه في كلّ مرة إظهار مهارته بالعدّ أمام أشخاصٍ قد يشعر أمامهم بالخوف أو بالغربة... ينتهي به الأمر إلى رفضٍ داخليٍّ لاشعوريّ لإظهار ما يعرف أو حتى لتعلّم المزيد. لنقل أنّه يبدأ دون أن يشعر، يكره الرياضيّات حتّى قبل أن يعرف اسمها! أو على الأقلّ ينفر من التعليم بشكلٍ عامّ.
- تلميذةٌ في المرحلة الابتدائيّة علاماتها جيّدة في مادّة الرياضيّات تضطر للتغيّب يوماً فيفوتها حضور درس القسمة على عدد مؤلّف من

رقمين. لا ينتبه والداها في البيت لضرورة تعويض ذلك. ويمنعها خجلها أن تطلب هي نفسها من المعلّمة أو من الأهل أو من إحدى رفيقاتها مساعدتها في فهم الموضوع. بل إنّ خجلها يدفعها للتهرّب من إظهار عجزها عن القيام بتلك العمليّة. ينتج عن ذلك عدم قدرتها على متابعة وفهم الدروس التالية وتبدأ علاماتها بالتراجع ثم تبدأ الطالبة تؤكّد لنفسها مع مرور الزمن أنّ الرياضيّات مادّة صعبة و أنّني لا أحبّ الرياضيّات. يجب أن نلحظَ هنا أنّ سمةً هامّةً ومميّزة للرياضيّات هي تعلّق كلّ درس بما قبله وهذا أحد الأسباب التي تجعل الرياضيّات قبل غيرها من الموادّ مادّةً صعبة أو غير محبوبة.

ذكرنا الضغط والخجل بيد أنّ هناك الكثير من العوائق الأخرى التي يمكن ذكرها أيضًا: صعوبة في اللغة، تغيير المدرسة، أو الإقامة، الغيرة، ...

أذكر على سبيل الفائدة القصّة التالية: كان والد غاوس، أحد أعظم الرياضيّين في التاريخ الحديث، يقوم بحساباتٍ تتعلّق بأجور عمّالٍ وكان غاوس البالغ من العمر ثلاث سنوات يراقب والده. انتبه الطفل النجيب لهفوةٍ ارتكبها والده أثناء الحسابات فأخبره بذلك. أعاد الوالد الحساب وتحقّق من صواب ملاحظة ولده وصحّح الحساب. لا شكّ أنّ تهنئة الولد والثناء عليه في مثل هذه الحالة أمرٌ يحمل الكثير من الأهميّة والتشجيع. ولكن ما الّذي كان سيحدث لو أنّ الوالد رفض الإصغاء لابن الثلاث سنوات أو لو أنّه زجره لتدخّله فيما لا يعنيه، وهو أمرٌ كثيرًا ما يحصل؟ لربّما كنّا قد فقدنا أحد أفضل العقول الرياضيّة خلال التاريخ.

٢- إنّ ما يجري في المرحلة الأولى من التعليم، أي نقل المعارف الرياضيّة الأساسيّة أمرٌ على جانبٍ كبيرٍ من الأهميّة وإذا كانت فكرة إعداد الطلاب منذ الصغر وتحضيرهم من منطلق أنّ بعضهم يمكن أن يجعلوا من الرياضيّات اختصاصًا لهم هي فكرةٌ يُشكُّ بفعاليّتها، وإذا كانت المعارف الرياضيّة اللازمة للحياة العمليّة هي أشياء يمكن يعلّم الكثير منها في الحياة كما سبق أن أوضحنا؛ فإنّ من المستحسن إذًا أن يجري نقل المعارف الرياضيّة الأوليّة بطرقٍ بسيطة، أبعد ما يمكن عن التعقيد وباستخدام الألعاب ووسائل الإيضاح المشوّقة بقدر ما يمكن ذلك. بل إنّه لمن الأكثر استحسانًا العمل المستمرّ على ابتكار مثل هذه الوسائل حين الحاجة. إنّ ما يتوجّب إعطاؤه الأولويّة إذًا هو نمو القدرة الذهنيّة عند التلاميذ وليس كميّة المعلومات الرياضيّة.

نخلص إلى طرح السؤال الذي بدأنا منه بشكلٍ مختلف فبدلاً من أن نسأل ما الذي يجعل مادّة الرياضيّات محبوبةً عند طالبٍ أكثر من رفيقه. نسألُ بالأحرى ما الذي يُفقِد الطالب في سنٍّ مبكرة في أغلب الأحيان محبّة مادّة الرياضيّات؟ ونرى أنّ هناك أسبابًا كثيرة أغلبها قد لا يبدو ذو أهميّة كبيرة، لكنّه في الحقيقة كذلك!

السؤال الثاني: كيف نساعد الطالب أن يحبّ الرياضيّات، أو أن يستعيد، بالأحرى محبّة الرياضيّات؟ يجري الحديث هنا، بشكلٍ خاصّ، عند مرحلةٍ أخرى من التعليم أعني ما بعد المرحلة الابتدائيّة.

كما رأينا إذاً يتوجّب في المرحلة الأولى أن نجتهدَ في إزالة العوائق والظروف التي قد توقف مسيرة التعلّم أو الموهبة الرياضيّة لكنّ ذلك غير

ممكنٍ كلّياً من الناحيّة العمليّة. إضافةً إلى أنّ الرياضيّات تزداد صعوبةً كلّما تقدّم المرء في دراستها. والحال يستحسن وجود طرقٍ تجعل دراستها أكثر قبولاً وراحةً وتلعب خبرة المدرِّس دورًا كبيرًا في هذا المجال. ويمكن أن نقدّم هنا بعض الاقتراحات التي لا يبدو لي أنّها مستحيلة التحقيق حتّى ضمن الإمكانيّات والظروف الراهنة:

١- الإكثار من استخدام وسائل الإيضاح المختلفة ولاسيّما الحديثة منها. إنّ استخدام الكمبيوتر أمرٌ مفيد جدّاً خصوصاً مع وجود برامج تعليميّة متطوّرة وفعّالة. والحال فإنّ علينا تطوير مثل هذه البرامج إن لم تكن موجودة. بل إنّي لأعتقد أنّ برامج خاصّة بالهندسة الفراغيّة تساعد في رؤية الأشكال في ثلاثة أبعاد مثلاً يجب أن تكون جزءًا من المنهاج المدرسيّ وهو أمرٌ بات تحقيقه من أبسط ما يمكن.

٢- الألعاب والمسائل الرياضيّة المسلّية التي تلعب دوراً كبيراً في عمليّة بناء العقل الرياضيّ حتى وإن لم تقدّم الكثير من المعلومات الجديدة. إن مثل هذه الرياضات الذهنيّة تقدّم الرياضيّات كمادّة للترويح عن النفس ويمكن للتلميذ من خلالها، سواء في البيت أو في المدرسة أو في نوادٍ خاصّة أن يمارس "هواية الرياضيّات".

٣- يمكن للمدرّس التركيز على بعض الفقرات الجذّابة والتي تقدّم شيئًا غريبًا و ممتعًا وتُظهر البعد الجماليّ في الرياضيّات. بشكل أوضح، يمكن على سبيل المثال عند إعطاء درس المتتاليات أن تقدَّم فكرةٌ عن متتالية عمر الخيّام وعن علاقتها بالطبيعة وبالفن وعن

العدد الذهبيّ وبعض خواصه...الخ (راجع الملحق الخاصّ بمتتالية عمر الخيّام)

٤- يمكن للمدرّس في أوقات ملل التلاميذ بعد فقرةٍ طويلة أو صعبة أو عند أيّة فرصة مواتية أن يتحدّث عن سيرة وإنجازات بعض الرياضيّين الكبار في التاريخ (خصوصًا العلماء العرب) أو عن قصّة برهان نظريّة معيّنة أو اكتشافٍ رياضيٍّ هام (على سبيل المثال القصّة الشهيرة لحساب غاوس لمجموع الأعداد بين الواحد والمائة)

٥- يمكن أن تُطرحَ على الطلاب بعض المسائل الرياضيّة العالقة (المخمّنات) حتى وإن بدا مستحيلاً حلّها من قبلهم (مثال مبرهنة فيرما الشهيرة مع أنّها أثبتت في النهاية) يعطي ذلك حماسًا كبيرًا وإمكانيّةً لعملٍ يعطي ثمرةً كبيرةً حتى لو لم يتوصّل الطالب إلى حلّ المسألة، فالثمرة هي الجهد الذي بذله وهي النمو الذهنيّ الذي حقّقه نتيجةً لهذا الجهد.

(لنلاحظ أن مثل هذه الأمور تتطلب ثقافة رياضيّة وتاريخيّة عند المدرس، وأشير هنا إلى أن هذه الثقافة تبقى شبه غائبة إذا لم يحصل عليها المدرّس نتيجةَ جهدٍ فرديّ فالاقتراح الأهمّ في هذا المجال هو وجود موادّ تنمّي هذه الثقافة في منهاج من يدرسون ليصيرُوا أساتذةً بل والتكوين المستمرّ للأساتذة في دوراتٍ صيفيةٍ أو في ندواتٍ ومناقشاتٍ متبادلة...)

٦- تُعتبر فترة البلوغ مرحلة نموّ وتكوّن لا جسميٍّ فقط بل ذهنيّ ونفسيّ أيضًا وإذا وافقنا على أنّ الرياضيّات هي رياضةٌ ذهنيّة فضلاً عن كونها مجموعة من المعارف وأنّها بالإضافة لكونها علمٌ فهي فنٌّ

أيضاً. فإنّ من الضروريّ في هذه المرحلة التركيز على إعطاء الرياضيّات كتدريبٍ ذهنيّ لا كمعلومات جامدة. على سبيل المثال أيضًا، نُعلّم الطلاب حلّ المسائل المتعلّقة بالأعمار وغيرها باستخدام جملة معادلتين بمجهولين. إنّ الفائدة الكبيرة لتعلّم هذه الطرق يمكن أن تخفي وراءها خطرًا كبيرًا يتمثّل في إهمالِ القدرات الحدسيّة. فليس خافيا أنّ الكثير من هذه المسائل يمكن أن تُحلّ بطرقٍ أبسط وبمقارباتٍ ذهنيّة لا تحتاج إلى ورقةٍ وقلم ولا إلى جملة معادلتين. وما أقوله هو أنّه علينا ألا نقيّد الطالب دومًا في إطار الحلّ النموذجيّ دون أن أقولَ إنّ تعلّم الطرق العامّة ليس ضروريًا.

٧- لننتبه دوماً إلى أن تحميلَ الطالب ما هو فوق طاقته، ووضعه في محلٍ لا يناسبه أمرٌ يعود بالأذى، لا العلميّ فقط بل والنفسيّ أيضًا، على الطالب نفسه وعلى الآخرين أيضاً. إنّ مسيرة التعليم هي، وأعتذر للتكرار، مسيرة تمييز في الوقت نفسه وفي هذه المرحلة من التعليم (بين الإعدادي والثانوي تقريباً) يظهر جليّاً أنّ بعض الطلاب وقد أخذوا ما هم بحاجةٍ إليه من الرياضيّات لحياتهم العمليّة باتوا غير مؤهّلين أن يتابعُوا أكثر من ذلك. ولابدّ من عمليّة فصلٍ حينئذٍ. ولا بدّ هنا من التوقّف عند الطريقة التي يجري بها هذا الفصل فعلى صعيد النظام المعمول به في وزارة التربية في سوريا أستطيع أن أسجّل على الأقلّ الملاحظتين التاليتين:

أولاً: إنّه سؤالٌ غالبًا ما يطرحه طلاب الصفّ العاشر: لماذا يدرس الطلاب الّذين سيتابعون دراستهم في الفرع الأدبيّ نفس الرياضيّات التي

يتلقّاها من سيتابعون في الفرع العلميّ؟ لماذا لا يجري الفصل منذ الصفّ العاشر بين الفرعين؟ أعتقد أنّ الأمر واضحٌ بما فيه الكفاية وما من داعٍ للشرح أكثر.

ثانيًا: إنّ الذين يتابعون دراستهم بعد المرحلة الإعداديّة (أو مرحلة التعليم الأساسيّ) في المدارس الصناعيّة والتجاريّة يحتاجون في معظم الأحوال إلى قدرٍ لا بأس به من الرياضيّات ومع ذلك يجري قبول الطلاب الأدنى محصّلةً في هذه المدارس. أرى أن من المناسب أكثر، ومن العادل أكثر، إذا كان لا بدّ من فرز الطلاب بحسب العلامات، أن يدخل الطلاب الفرع الأدبي على أساس علاماتهم في اللغة العربيّة واللغة الأجنبيّة والتاريخ والجغرافيا... وأن يُفصَل بين الذين سيتابعون في الفرع العلمي أو التجاري أو الصناعي على أساس علاماتهم في الرياضيّات والفيزياء والكيمياء... لقد عملتُ أكثر من عامٍ في تدريس الرياضيّات لطلاب بكالوريا صناعيّة باختصاص ألكترون وكهرباء. بعض هؤلاء الطلاب كانوا بالكاد قد أدركوا علامة النجاح في مادّة الرياضيّات في الصفّ التاسع وهم غير مؤهّلين قطّ لدراسة موادّ علميّة... في حين صادفتُ عدداً غير قليلٍ منهم يملكون مواهب لا بأس بها في اللغات أو في الشعر وقد يحبّ بعضهم الآخر دراسة التاريخ... لكن هيهات فقد حكمت علاماتهم عليهم بدراسة الفرع الصناعي..

أمّا في المرحلة التي تسبق الفصل فمن الضروريّ الحرص على ألا تكون صعوبة المادّة عائقًا أمام معظم التلاميذ أي أن يكون مستوى ما يُعطى ملائمًا للأغلبيّة على قدر الإمكان، مع إمكانيّة توجيه المتفوّقين

والمميّزين بطرقٍ أخرى. كأن نضع بين أيديهم كتبًا معيّنة في الثقافة العلميّة والرياضيّة أو أن يُعطَوا دروسًا إضافية وهي غير الدروس الخصوصيّة التي تعوّدنا عليها والتي سنقف عندها لاحقًا.

نشدّد أخيراً على أنّ عمليّة الفصل هذه لا تعني أبدًا عمليّة تفضيلٍ لفئةٍ على أخرى، بل هي تمييزٌ لإمكانات ومواهب كلّ شخص وهو فصلٌ يجب أن يكون طوعيّاً بقدر ما تسمح الظروف والإمكانات.

٨- هناك دوماً فقراتٌ طويلةٌ وصعبة ومرتبطةٌ فيما بينها. إنّ من الضروريّ جدّاً الحفاظ على الدقّة الرياضيّة وتدريب الطلاب على أهميّتها. ومع ذلك فإن من الضروري في بعض الأحيان اللجوء لاختصار بعض الأمور أو تقديمها بشكلٍ سريعٍ قبل شرحها بالتفصيل إذ إنّ شرحًا دقيقًا وصحيحًا بشكلٍ كامل، وبالتالي أكثر طولاً وصعوبةً بالضرورة، غالبًا ما يحجب النتيجة التي يُراد بلوغها بدلاً من أن يُظهرها. إنّ إهمال بعض الشروحات الصغيرة أو التعليلات التي يمكن للطالب (بل يطلب منه) أن يعرفَها بنفسه أمرٌ يساعد الطالب على ألاّ يحفظ التمرين أو المبرهنة عن ظهر قلب وأن يفكّرَ هو نفسه بالبرهان وأن يطرحَ التساؤلات وأن يُتمَّ جزءًا من العمل بنفسه فيكون له ذلك فرصةً إضافية لنموّ تفكيره الرياضيّ.

السؤال الثالث الذي وددتُ طرحه يتعلّق بحبّ المدرّس نفسه للمادّة التي يدرِّسها. هل من الضروريّ أن نذكّر أنّ التعليم، وهو رسالة من حيث المبدأ، قد إمتهن إلى أقصى الحدود! وهل ثمّة داعٍ أن نقولَ إنّ هناك فرقاً

بين مدرّسٍ درس الرياضيّات لأنّ علاماته في البكالوريا لم تسمح له بما هو "أفضل" (مع أنّ الطبَّ والهندسة ليست أفضل من الرياضيّات ولا الرياضيّات أفضل من أيّة دراسة أخرى) ثمّ درّس الرياضيّات لأنّ التدريس مهنةٌ تضمن معيشته. وبين مدرّسٍ أحبّ المادّة فدرسها ورأى ما فيها من متعة وأهميّة فأحبّ أن ينقلها إلى غيره أيضًا وكم يبلغ عدد أو كم تبلغ نسبة هؤلاء المدرّسين، أي الفئة الأخيرة التي تحدّثت عنها؟

علينا ألا نشكوَ أنّ طلابّنا لا يحبّون الرياضيّات إذا كنّا نحن أساتذة الرياضيّات لا نحبّها وإذا كانت لا تعني لنا أكثر من وظيفة وراتب ودروس خصوصيّة. إنّ حبَّ الرياضيّات يمكن أن ينتقلَ من المعلّم إلى التلميذ انتقال المرض بالعدوى أمّا إن غابَ عند المدرّس نفسه فإنه سيُفقَد بالتأكيد عند الطالب حتّى ولو كان موجودًا بدرجةٍ أو بأخرى! ولمّا كان من الصعوبة بمكان زرع حبّ الرياضيّات وحبّ التعليم في قلب مدرّسٍ لا يرى في الأمر أكثر من واجبٍ وظيفي فإنّ من الأهميّة بمكان حسن اختيار ومن ثمّ حسن تكوين المدرّسين. لا من ناحية المستوى العلميّ فحسب بل أولاً من حيث محبّتهم لعلمهم ولعملهم ومن حيث استعدادهم لرسالتهم لا لعملهم ذلك إنّ ما يبنى على الصخر يثبت أما ما يبنى على الرمل فينهار مع أول هبوب ريح.

مَن يُعلّم مَن؟

ثمّة حقيقةٌ يجب أن نضعَها نصب أعيننا. وهي أن ليس هناك مقياسٌ مطلقٌ لصلاحيّة منهجٍ أو آخر. فحتّى لو كان كلّ العالم وأنا منه، نقرُّ بأن الرياضيّات مادّة هامّة ومن الضروري تعليمها منذ الصغَر، تبقى هذه المادّة أو أي مادّة سواها، نوعًا من تعسّفٍ ثقافي نفرضه بلا حقّ على أطفالنا.

يمكن أن نقولَ أنّه أفضل الموجود أو أنّه الموجود والمتّبع في كلّ مكان لكنّنا لا نستطيع القول أنّه حتميّ! هذا على صعيدٍ عام وعلى صعيدٍ جزئيّ يتكرّر السؤال: ما هو الأهمّ في تعليم الرياضيّات؟ أيّ فقراتٍ نعطي في مرحلة ما من مراحل التعليم؟ كيف نختار المنهاج؟

تتراوح الاتجاهات بين التطرّف الشديد والاعتدال. لكنّها تُجمع بالتأكيد على ضرورة مراجعة النظرة، التي تُرى من خلالها العمليّة التربويّة والتعليميّة.

كان جان جاك روسو J. J. Rousseau، أوّل فيلسوفٍ نادى بإعادة النظر في مفهوم التعليم وأعاد الاعتبار للطفل ودعا للنظر إلى حاجاته ومتطلباته لا إلى فرض تعليمنا ومنهجنا عليه. *"إنّ أسلوبهم"* أي الأطفال والحديث لروسو " *يختلف عن أسلوبنا وما هو بالنسبة لنا فنّ التفكير والاستدلال هو عندهم فنّ الرؤيا. وبدلاً من أن نقدّم لهم أسلوبنا وطريقتنا يجدر بنا أن نتبنّى طريقتهم..*"

كان روسو يطالب بما لا يقلّ عن امّحاء المعلّم أمام الطفل وعن تبنّي مقولة أن التربية ليست تقديم معلومات بل بالأحرى استراتيجيّة ترمي إلى تكوين نفسيّة وذهن ناضجين.

ولقد عارض الفكرة الشائعة في أنّ الطفل ورقة بيضاء لنا أن نكتب عليها ما نريد وبالنسبة للرياضيّات أشار إلى ضرورة احترام الطفولة، غير القادرة على الحكم ولا على البرهان وبالتالي على وجوب عدم تلقينها الرياضيّات. ويقول *"إن الآخرين يُعارضون فكرتي مؤكّدين أنّ الأطفال يتعلّمون مبادئ الهندسة. لكنّ هذا القول قولٌ مردود إذ أنّ الطفل يستطيع*

أن يحفظ برهانًا ما ، لكنّه عند أقلّ تغيير في صياغة هذا البرهان أو في الرموز المستخدمة أو حتى في حالة قلب الشكل الهندسي المعبّر عن المسألة المطروحة ، يضيع في أغلب الأحيان. إنّ كلّ معرفته تتوقّف إذًا عند مستوى الحسّ ولا تتعدّاه إلى مستوى الفهم العميق".

نلمس ولا شكّ شيئًا من التطرّف في أفكار جان جاك روسو، على الرغم من أهميّتها الكبيرة. إنّ تدريس الهندسة إذا كان يرمي إلى بناء فكرٍ رياضيّ لا إلى حفظ معلومات، هو أمر ممكن حتّى لأعمارٍ أصغر من المعتاد على أن تُراعى الطريقة التي تقدَّم بها المادّة.

يرفع الشعار الحديث للتربية مقولة: *"التربية من أجل الطفل وليس الطفل من أجل التربية"*. وردُّ الاعتبار للطفل على هذا النحو، لم يأخذ كلَّ أبعاده إلا مع تقدّم التحليل النفسيّ الذي يرى في كلّ تربية، سواء شئنا أم أبينا، عمليّة كبتٍ منظَّم للدوافع والمواهب وأنّ التربية الأصلح هي التي تستطيع بأفضل ما يمكن أن تنظّم هذه الدوافع والمواهب وتوجّهها. يمكن أن يعني ذلك إذا رجعنا لمثَل زراعة الحبوب، الفصل المبكّر للنبتات حسب نوعها ووضعها وتجميعها بحيث يمكن تأمين مستلزمات كلّ منها.

يتناقص الدافع الذاتيّ عند الطالب كلّما كان المنهاج المفروض، والطريقة المتّبعة في إعطائه أكثر تحديدًا وحصرًا. ويبحث خيالهُ دومًا عن مجالٍ لعمل العقل أكثر بعدًا عمّا هو مفروضٌ عليه. إنّه يسعى أن يستكشف لا أن يتلقّى. نلمس هذه الحقيقة في أسئلة الطلاب المهتمّين بالرياضيّات فغالبًا ما يطرحون أسئلةً يستبقون فيها الدروس التالية.

كان والد بليز باسكال، الفيلسوف والرياضيّ الفرنسيّ الكبير ومخترعِ أوّل آلةٍ حاسبة ميكانيكيّة، يرى أنّ من المبكّر على ولده أن يدرسَ الهندسة وكان يقيمُ أهميّةً أكبر لدراسة اللغتين اللاتينيّة واليونانيّة. لكنّه استسلم للأمر عندما وجد ولده مرّةً يحاول برهان إحدى المسائل من كتاب المبادئ لاقليدس بعد أن كان قد قطع شوطًا كبيرًا في دراسة هذا الكتاب دون علم والده. من حسن الحظّ أنّ والد باسكال شجّع ولده منذ ذلك الوقت على دراسة الرياضيّات متخلّيًا عن قناعته التربويّة الخاصّة ولكن أليس من الممكن جداً أن باسكال الصغير ما كان ليبدي هذا الاهتمام بالهندسة لو سُنح له أن يتلقّاها بطريقةٍ تلقينيّة حفظيّة وبإطار منهاجٍ مُلزِمٍ ومفروض؟

تسعى المناهج الحديثة أن تكونَ أكثر مرونة بحيث تتيح للمدرّس قدرةً أكبر على التكيّف مع حاجات الطلاب ومع مقدار جهدهم ومدى استيعابهم وبحيث تتيح للطالب مجالاً للاستكشاف بنفسه وللبحث عمّا يريد أن يدرس ويتعلّم وعبر طرق مختلفة أحيانًا ويتطلّب تطبيق مثل هذه المناهج إمكانياتٍ مادّيّة كبيرة إذ ينبغي أن يتواجدَ في الصفّ الواحد أقلّ عددٍ ممكنٍ من التلاميذ إضافةً لضرورة توفّر وسائل تعليميّة مختلفة كما يتطلّب الأمر أيضًا كفاءةً كبيرةً من المدرّسين وكلّ ذلك يشكّل صعوباتٍ يحتاج التغلّب عليها وقتًا طويلاً. يستطيع الأهل المساعدة في إنجاح هذه الطرق على أن يملكوا الحدّ الأدنى من التدريب اللازم وهنا تظهر ضرورة المرافقة الشخصيّة أيّ الدروس الخاصّة سواء من الأهل أو من أشخاص مدرّبين بشرط ألا تكون هذه الدروس عبارة عن مساعدة الطالب في حلّ وظيفته أو حلّها كلّيّاً عنه كما هو شائع في أغلب الحالات.

الدروس الخاصّة

أحبُّ أن أشير أوّلاً إلى أنّ الدروس الخاصّة (وأفضّل وأن أسميها المرافقة الشخصيّة في الدراسة) هي حاجةٌ تخصّ الطفلَ أكثر بكثيرٍ من البالغ. إنّ طالب البكالوريا الذي يحتاج إلى دروسٍ خاصّةٍ في الرياضيّات هو مبدئيّاً غير جديرٍ بأن يكون طالب بكالوريا اللّهمَّ إلا في حالاتٍ وظروفٍ استثنائيّة. إنّ مراحل التعليم الأولى تتطلّب متابعةً وانتباهاً كبيرَين ويلعب المربّي الذي يرافق الطفل في دروسه (ويفضل أن يكون أحد الوالدين أو كليهما إذا كان مؤهّلاً علميّاً) دورًا هامّاً في مساعدة الطالب في التغلّب على الصعوبات التي يمكن أن تعيقَه والتي تحدّثنا عن أمثلة منها في بداية حديثنا هذا.

كثيراً ما يضع الأهل معلّمةً لأطفالهم تكون وظيفتها مع الأسف مساعدتهم في كتابة الوظائف أو كتابتها بدلاً منهم. إنّ ما يتعلّمه الطفل في هذه الحالة هو الاتكاليّة.

إنّ عمل المعلّمة هو عملٌ مكمّلٌ للمدرسة دون أن يكون هو عمل الطالب نفسه إنّ المطلوب هو مراقبة الطالب في نموّه الدراسي والانتباه من السقوط المحتمل كما تراقب الوالدة ابنها عندما يبدأ المشي إنّها تترك له حرّيّة المشي وتخاطر بإمكانيّة وقوعه شرط أن تراقبه دومًا بحيث لا يكون السقوط مؤذيًا أمّا منعه من المشي تمامًا فلن يعلّمه إيّاه أبدًا. كذلك على المعلّمة التي ترافق الولد في نموّه الدراسيّ أن توجّه دراسته وتجعله يحلّ المسألة حتّى ولو أخطأ ثم تصحّح له، بل ربّما أن تعطيَه مسألةً إضافيةً إذا احتاج الأمر.

أمّا بالنسبة للطلابّ الذين بلغوا وعيًا كافيا فمن المفترض أن يستطيعوا تدبّر أمورهم بأنفسهم أكثر وأن يواجهوا ضعفهم ويتغلّبوا عليه.

إنّ الدروس الخاصّة باتت وسيلةً لتعليم الطالب كيف يصطاد العلامة وكيف ينجح دونَ أن يفهمَ وكيف يحفظ طرق الحلّ المختلفة بغضّ النظر عن الأساس النظريّ الذي تقوم عليه وإذا كنّا نبني طالبًا يستوعب من الأساس ما يدرس ويستطيع أن يفكّر رياضياً ويكتشف فإنّ موضة الدروس الخصوصيّة لطلابّ التاسع والبكالوريا ستتلاشى من تلقاء نفسها. لنقل أخيرًا إنّ الطريقة الخطيّة المتّبعة في الفحص والتي لم تتغيّر منذ زمن طويل جداً تساعد في إمكانيّة أن يتعلّم الطالب كيف يأخذ العلامة دون أن يفهم! أريد القول إنّ الامتحان هو جزء من طريقة التعليم وهو جزء هامّ منها فعلينا أن ننتبه لطرق الفحص بحيث تخدم عمليّة الفهم لا الحفظ.

وبعد

كان من الجدير بي ربّما أن أعنون هذا الفصل "شجونٌ تربويّة" فحديث التربية والتعليم حديثٌ ذو شجون ولعلّي لن أنتهي إن لم أضع لنفسي حدّا! ثمّة أفكارٌ كثيرة يمكن أن تُطرح وأن تُناقشَ بعد. لكنّ المكان لا يتسّع هنا فالكتاب غير موجّهٍ لمختّصين في الموضوع وإن كنتُ من جهةٍ أخرى أقيم وزنًا كبيرًا لوضع القارئ العاديّ المهتمّ بالعلم والتعليم في آفاق هذه الأفكار... أريد باختصارٍ وكخاتمةٍ للموضوع، ومهما حُكِمَ عليّ بالمثاليّة واللاواقعيّة... أن أوجّه كلّمةً صغيرة للمربّين، وكلّنا مربّون بطريقةٍ أو بأخرى:

تحتاج العمليّة التربويّة وفيها تعليم الرياضيّات إلى مراجعةٍ كبيرة تستلزم تضافر جهودٍ شتّى. وعلينا من أجل ذلك أن نخرج من دوائرنا الضيّقة وأن نحاول إلقاء نظرةٍ أكثر شموليّة. إنّ الواقع العالميّ الحاليّ إنّما يشير من بين أشياء كثيرة إلى كوننا لا نجيد كثيرًا بناء مستقبلٍ مرْضٍ للأرض التي باتت بيتنا الصغير. علينا والحال أن نضع أمل خلاص البشريّة في الأجيال المقبلة وأن نؤمن بها وأن نؤمّن لها ما تحتاجه، من العلم ربّما، ومن أشياء أخرى أعتقد أنّها أكثر أهميّة. وأوّل هذه الأشياء هي الحريّة. حتّى حريّة اختيار ما يريدون تعلّمه وما لا يريدون. وبغضّ النظر عن معاييرنا في صلاحيّة وعدم صلاحيّة هذا المنهج أو ذاك. أريد أن أتوجّه إلى كلّ القائمين على العمليّة التربويّة وعلى جميع المستويات لأقول لهم إنّ أولادنا يملكون مواهب كبيرة وإننا لا نساعدهم كثيراً في الحفاظ عليها وتفتحها.

من أجل شرف روح الإنسان
أو
الرياضيات موسيقى العقل

الجمال دين الحكماء
مأثور هندي

الثلاثاء الخامس والعشرين من شباط عام ٢٠٠٣..

أجلسُ قرب النافذة أراقب هطول الثلج، وأتأمَّل الأشجار والأبنية المكسوّة بالثلوج. أحاول أن أطالَ بنظري الجبل البعيد وحتّى السهل القريب لكنّي لا أفلح إذ تحجبهما عنه كثافة الثلج المالئ السماء.

تقعُ عيناي على كتابٍ أمامي على الطاولة عنوانه بالفرنسية : pour l'honneur de l'esprit humain "من أجل شرف روح الإنسان". وهو عنوانٌ لا يوحي بشيءٍ معيّن لذلك ألحق به الكاتب عنوانًا متمّمًا: les mathmatiques aujourd'hui "الرياضيات اليوم"!! فما هي علاقة الرياضيات بشرف روح الإنسان؟

تحمل الترجمة الانكليزية لهذا الكتاب نفسه عنوانًا آخر: "الرياضيات موسيقى العقل mathematics music of the reason" أمّا مؤلّف الكتاب Jean

Dieudonné وهو واحدٌ من كبارِ الرياضيِّين المعاصرين في فرنسا وأحد المؤسِّسين الخمسة لمجموعة بورباكي، فهو يقتبس عنوان كتابه من مقطعٍ من رسالةٍ كتبها منذ قرنٍ وربع القرن عالم الرياضيات الكبير كارل جاكوبي C.G.J. Jacobbi. أفتحُ الصفحة الأولى من الكتاب وأقرأ ما يقول هذا الأخير: "*كان فورييه يرى أن الهدف الرئيس للرياضيات هو المنفعة العامّة وتفسير الظواهر الطبيعيّة؛ غير أنّه كان من الجدير بمفكّرٍ مثله أن يعرف أنّ الهدف الوحيد للعلم هو شرف روح الإنسان وأنّه وفق هذه النظرة تعادل في الأهميّة مسألةٌ ما في الأعداد قضيّةَ منظومة الكون*."

لا جرم أنّ جاكوبي لا يبتعد كثيرًا عن الحقيقة. ففي نهاية الأمر يتعلّق كلُّ هذا الجمالِ الأبيضَ الممتدُّ أمامي، مع كلِّ ما يحمله إلى روح الإنسان من مشاعرَ سحرية بالحقيقة البسيطة لشكل حبيبة الثلج السداسيّ الذي يسمح بسهولةٍ بتراكب الحبيبات لتشكّل ندفةً وبتراكم ندف الثلج لتغطّي السهل والجبل. وبمعنىً آخر لتغطّي كميّةٌ قليلةٌ من المياه المتجمّدة هذه المساحات الشديدة الأتّساع بالنسبة لحجم الماء نفسه!

وهذا الثلج المتساقط بهدوءٍ طورًا وبشدّةٍ تارةً يتلاعبُ به الهواء، فيكنسه أو يذروه، فأراه نازلاً من فوق حينًا وصاعدًا من تحتٍ حينًا، راسمًا أشكالَ ومنحنياتٍ غريبةً لا يستطيعُ أن يصفها غيرُ رياضيٍّ بارع، أفلا يضارع بحقّ سيمفونيةً عظيمة؟ أعتقد من جهتي أنّ الموسيقى والرياضيات وهذا النقاء النازل من السماء ما هم غير حقيقةٍ واحدة معبَّرٌ عنها بلغات مختلفة: وهذه الحقيقة هي الجمال... الكامن في كلّ شيء والمتجلّي في كلّ شيء، الجمال الّذي تنبأ دوستويفسكي بأنّه هو وحده من سيخلّص العالم.

٥ تمّوز ٢٠٠٣

ذابت كلّ تلك الثلوج. وبقيت الجبال والأشجار والأبنية. وهذه ستزول بدورها يومًا. وحتّى الأرض نفسها والمجموعة الشمسيّة برمّتها سينتهي أجلها ولا تعود... لكنّ النظام الذي يحكم كلّ هذه الأشياء باقٍ إلى الأبد. وسواء كان نظامًا إلهيّاً كما يؤمن الكثيرون، أو مجرّد صدفةٍ كونيّة كما يرى آخرون... فإنّه في الحالتين نظامٌ رياضيُّ الطابَع. ومع أنّه باقٍ إلى الأبد وخالدٌ في كلّ الأحوال إلا أنّه يستمدُّ الكثير من قيمته ومعناه من وجود من يكتشفه ويتحدّث عنه ويُسحَرُ به... أيّ منّا، ومن مشاركتنا في هذا الحديث وفي هذا العجب. ذلكم هو شرف روح الإنسان.

المراجع

المراجع الأساسية:

١. Grande Encyclopédie ALPHA des sciences et des techniques, Editions Atlas, Paris 1976.

٢. Histoire générale des sciences, sous la direction de René Taton. Presses Universitaires de France, Paris 1957.

٣. Pour l'honneur de l'esprit humain, les mathématiques aujourd'hui, Jean Dieudonné, Hachette 1987.

٤. Les nombres et leurs mystères, André Warusfel, Editions du Seuil, Paris 1961

٥. La Recherche, mensuel scientifique, n° 278 Juillet / Août 1995

٦. Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, René Descartes, Paris ayard 1987.

٧. الرياضيات، ديفيد برغاميني، منشورات وزارة الثقافة السورية، دمشق ١٩٦٩

٨. موسوعة تاريخ العلوم العربية بإشراف رشدي راشد، الجزء الثاني، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت ١٩٩٧.

٩. قصّة الأرقام عبر حضارات الشرق القديم، موسى الخوري، منشورات وزارة الثقافة السورية، دمشق ٢٠٠٢.

١٠. الرياضيات والبحث عن المعرفة، موريس كلاين، دار الشؤون الثقافية العامّة، بغداد ١٩٨٧.

١١. بحثًا عن الجمال، ف. سميلجا، دار مير، موسكو ١٩٧٦.

١٢. قيمة العلم، هنري بوانكاريه، دار التنوير للطباعة والنشر، بيروت ١٩٨٢

مصادر إضافية

١- Lettres de voyage, P. Teilhard de Chardin, Paris 1982

٢- Encyclopédie Universalis, sur C.D.Rom, version 98

٣- Le nombre d'or, D. Neroman, Dervy-Livres Paris 1981

٤- La Recherche, mensuel scientifique, n° 250, Janvier 1993

٥- Pascal, œuvres complets, Paris Seuil 1963.

٦- Les nombres sacrés et l'origine des religions, M.H Gobert, Stock + Plus, Paris 1971.

٧- نشيد الكون، تيار ده شاردان، دار المشرق، بيروت ١٩٨٩.

٨- ظاهرة الإنسان، تيار ده شاردان، تقديم جوليان هكسلي، مطابع ألف باء الأديب، دمشق ١٩٧١.

٩- صحوة الكرة الأرضية، بيتر راسل، منشورات وزارة الثقافة السورية، دمشق ١٩٩٨.

١٠- العلم يواجه تخوم المعرفة، وثائق ندوة البندقية، مجموعة من العلماء والمفكّرين، منشورات وزارة الثقافة السورية، دمشق ١٩٩٤.

١١- أغنية الطائر، أنتوني ده ميللو، مكتبة إيزيس، دمشق ٢٠٠٠.

١٢- مستقبل العلم، عدد من العلماء، دار طلاس بالتعاون مع المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا، دمشق ١٩٩٥.

١٣- العلم والحياة، فرناند سيغن، منشورات وزارة الثقافة السورية، دمشق ١٩٩٨.

١٤- أجمل المعادلات الرياضية، ليونيل سالم، أكاديميا إنترناشيونال، بيروت ١٩٩٦.

١٥- كتاب التاو، لاوتسو، ترجمة هادي العلوي، دار ابن رشد، بيروت ١٩٨١.

١٦- الرياضيات، شارلز سولومون، معهد الإنماء العربي، بيروت ١٩٨١.

١٧- لقاء، ميخائيل نعيمة، دار نوفل، بيروت ١٩٩٩.

١٨- الباهر في الجبر، السموأل المغربي، تحقيق صلاح الأحمد ورشدي راشد، وزارة التعليم العالي في سوريا، دمشق ١٩٧٢.

١٩- ديانة الشاعر، رابندرانات طاغور، دار الغربال، دمشق ١٩٨٨.

٢٠- حياة غاليليه، برتولد بريشت، دار الفكر الجديد، بيروت ١٩٧٣.

٢١- الرياضيات في حياتنا، زلاتكا شبورر، سلسلة عالم المعرفة، الكويت ١٩٨٧.

٢٢- منعطف الرياضيات الكبير، فايز فوق العادة، منشورات وزارة الثقافة السورية، دمشق ١٩٨٧.

٢٣- برتراند راسل، دراسة في تطوّر فلسفته، آلان وود، دار علاء الدين، دمشق ١٩٩٤.

٢٤- علم النفس الجديد وطرقه المدهشة، بيير داكو، دمشق دار الغربال، ١٩٩٠.

٢٥- مع القفزة الكمومية، فريد آلان وولف، دار طلاس، بالتعاون مع المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا، دمشق ١٩٩٤.

٢٦- من يلعب النرد ، إيان ستيورات، دار طلاس، بالتعاون مع المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا ، دمشق ١٩٩٤.

٢٧- تاريخ موجز للزمن، ستيفان هوكينغ، دار الثقافة الجديدة، القاهرة ١٩٩٠.

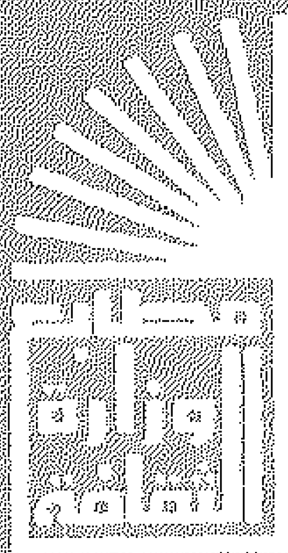
٢٨- هكذا أرى العالم ، آلبرت اينشتاين، وزارة الثقافة السورية ، دمشق ١٩٨٥.

٢٩- الولد الخجول وتربية الثقة بالنفس، كوستي بندلي، جروس بريس، طرابلس لبنان ١٩٩٤.

الفهرس

الطبعة الأولى / ٢٠٠٧

عدد الطبع ١٠٠٠ نسخة



سعر النسخة داخل القطر ١٤٠ ل.س
في الأقطار العربية مايعادل ٢٨٠ ل.س